Prof. Dr. R. Ketzmerick/Dr. R. Schumann
Technische Universität Dresden
Institut für Theoretische Physik

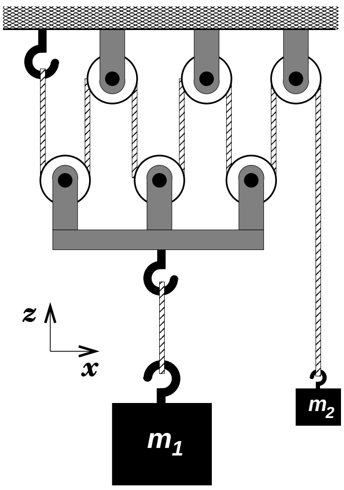
Sommersemester 2008

Theoretische Mechanik

9. Übung

9.1 d'Alembertsches Prinzip: Flaschenzug

Wir betrachten die Massen m_1 und m_2, die sich entsprechend der Abbildung im Gleichgewicht befinden. Überlegen Sie sich die Art des Gleichgewichts! Bestimmen Sie aus dem d'Alembertschen Prinzip das Massenverhältnis m_1/m_2 für die in der Abbildung angegebene Anordnung!



Für die beiden Massen werden die virtuellen Verrückungen $\delta\vec{r}_1$ und $\delta\vec{r}_2$ eingeführt. Mit den auf beide wirkenden **äußeren** Kräften lautet dann das d'Alembertsche Prinzip

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_n \left[m_n \ddot{\vec{r}}_n - \vec{F}_n \right] \delta\vec{r}_n \\ 0 &= \vec{F}_1 \delta\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \delta\vec{r}_2 \,. \end{aligned}$$

Man beachte: Es wird hier das statische Gleichgewicht betrachtet, deshalb verschwinden die Beschleunigungen.

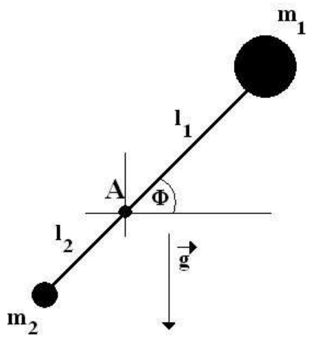
Zur Erinnerung: Das d'Alembertsche Prinzip verlangt, daß die gesamte Arbeit der Zwangskräfte bei virtuellen Verrückungen verschwindet, nicht, daß die Zwangskräfte senkrecht auf den virtuellen Verrückungen stehen. Letzteres gilt nur bei **einem Teilchen und einer Zwangsbedingung**.
Unter Berücksichtigung der Zwangsbedingung wird m_1 nach oben verschoben und m_2 entsprechend nach unten verschoben werden. Wird das Seil als undehnbar angenommen und werden Pendelbewegungen der Massen ausgeschlossen, ist dann im Gleichgewicht

$$m_1 g\,\delta z_1 + m_2 g\,\delta z_2 \;=\; 0 \quad \text{woraus mit} \quad \delta z_2 = -6\,\delta z_1 \quad \frac{m_1}{m_2} = 6 \quad \text{folgt.}$$

9.2 d'Alembertsches Prinzip: Hebelgesetz

Zwei Kugeln im Schwerefeld (als Massenpunkte betrachten; Massen m_1, m_2) sind durch eine (masselose) feste Stange der Länge $l_1 + l_2$ miteinander verbunden, die um eine horizontale raumfeste Achse A drehbar gelagert ist.

a) Gewinnen Sie aus dem d'Alembertschen Prinzip die Bewegungsgleichung für den Drehwinkel ϕ.



Das D'ALEMBERTsche Prinzip besagt, dass die gesamte Arbeit der Zwangskräfte bei virtuellen Verrückungen $\delta\vec{r}_n$ in einem System mit Zwangsbedingungen verschwindet. Aufgeschrieben für n Massenpunkte heißt das

$$\sum_n (m_n\ddot{\vec{r}} - \vec{F}_n)\,\delta\vec{r}_n \quad = \quad 0\,. \tag{1}$$

Dabei sind virtuelle Verrückungen bei festgehaltener Zeit gedachte Verschiebungen der Ortsvektoren $\vec{r}_n$, die in Übereinstimmung mit den Zwangsbedingungen sind, diese also nicht verletzen. Zweckmäßig ist die Beschreibung des hier betrachteten Systems unter Verwendung ebener Polarkoordinaten (vom Inertialsystem aus).

Die Zwangsbedingungen lauten

$$\begin{aligned} l_1 &= \text{constant} \\ l_2 &= \text{constant} \\ \phi_1 &= \phi_2 + \pi\,. \end{aligned}$$

Für die Beschleunigung, ausgedrückt in ebenen Polarkoordinaten, gilt allgemein (siehe Aufgabe 1.3)

$$\ddot{\vec{r}} \quad = \quad \vec{e}_\rho \cdot (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) + \vec{e}_\phi \cdot (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\,.$$

Indem die Gewichtskraft in Komponenten zerlegt wird

$$\vec{F}_{g,n} \quad = \quad -m_n g \cdot \sin\phi_n \cdot \vec{e}_\rho - m_n g \cdot \cos\phi_n \cdot \vec{e}_\phi\,,$$

und die virtuellen Verschiebungen der beiden Massenpunkte mit Hilfe der Polarkoordinaten ausgedrückt werden

$$\delta\vec{r}_n = l_n \cdot \delta\phi_n \cdot \vec{e}_\phi\,,$$

ergibt sich für die virtuelle Arbeit der Zwangskräfte

$$\begin{aligned} \sum_n m_n \cdot \left[l_n \cdot \ddot{\phi}_n + g \cdot \cos\phi_n\right] \cdot l_n \cdot \delta\phi_n \quad &= \quad m_1 \left[l_1\ddot{\phi}_n + g\cos\phi_1\right] l_1 \cdot \delta\phi_1 \qquad (2) \\ &\quad\; + m_2 \left[l_2\ddot{\phi}_2 + g\cos\phi_2\right] l_2 \cdot \delta\phi_2 = 0\,. \end{aligned}$$

Aus der Zwangsbedingung folgt

$$\delta\phi_1 \;\stackrel{!}{=}\; \delta\phi_2 \equiv \delta\phi \qquad \ddot{\phi}_1 = \ddot{\phi}_2 \equiv \ddot{\phi} \qquad \cos\phi_1 = -\cos\phi_2 \equiv \cos\phi\,.$$

Einsetzen in die obige Gleichung liefert dann

$$\left\{m_1 l_1 \left[l_1\ddot{\phi} + g\cos\phi\right] + m_2 l_2 \left[l_2\ddot{\phi} - g\cos\phi\right]\right\} \cdot \delta\phi \quad = \quad 0\,,$$

woraus, wegen der Beliebigkeit von $\delta\phi$ die Bewegungsgleichung für den Winkel ϕ folgt:

$$\ddot{\phi} + g\frac{m_1 l_1 - m_2 l_2}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}\cos\phi \quad = \quad 0\,.$$

b) Leiten Sie daraus die Gleichgewichtsbedingung (Hebelgesetz) her.
Im Gleichgewicht verschwindet die Winkelbeschleunigung $\ddot{\phi}$. Damit erhält man sofort das Hebelgesetz

$$m_1 l_1 \quad = \quad m_2 l_2\,.$$

Diskussion:

- Das Vorzeichen für $\ddot{\phi}$ kommt „richtig" heraus, wie man z.B. für gleiche Massen und $l_2 > l_1$ sieht.
- Setzt man statt ϕ den Winkel $\varphi = \phi - \pi/2$ (Winkel gegen die y - Achse) ein, erkennt man, dass die Bewegungsgleichung die eines mathematischen Pendels ist.

$$\ddot{\varphi} + g\frac{m_2 l_2 - m_1 l_1}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}\sin\varphi \quad = \quad 0$$

  Für kleine Auslenkungen φ ergibt sich dafür die Schwingungsdauer

$$T = \frac{1}{2\pi}\cdot\sqrt{\frac{\tilde{l}}{g}} \qquad \text{mit} \quad \tilde{l} \equiv \frac{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}{m_2 l_2 - m_1 l_1} \quad \text{(reduzierte Pendellänge).}$$

- Man erhält selbstverständlich dieselbe Bewegungsgleichung, wenn man das D'ALEMBERTsche Prinzip in kartesischen Koordinaten auswertet.
- Die Zwangskräfte, die den Abstand der beiden Körper konstant halten, können nun im Prinzip aus Gleichung (1) ermittelt werden, wenn man von der Beschleunigung $\ddot{\vec{r}}$ und der Gewichtskraft nur die Komponenten in Richtung $\vec{e}_\rho$ betrachtet:

$$Z_n \equiv |\vec{Z}_n| = m_n\, l_n^2\, \dot{\phi}^2 + m_n g \sin\phi_n.$$

  Weil hier aber $\dot{\phi}$ bekannt sein muss, sieht man, dass zur Berechnung der Zwangskräfte zunächst die Bewegungsgleichung für ϕ gelöst werden muss.

9.3 Zwangskräfte

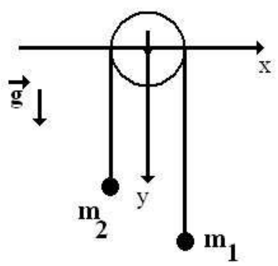
a) Ein Massenpunkt bewegt sich unter Einfluss der Gewichtskraft $\vec{F} = -mg\cdot\vec{e}_z$ in einer gekrümmten Schiene, deren Form durch die Gleichungen $z = f(x)$, $\;y = 0$ vorgegeben ist. Bestimmen Sie die Zwangskraft $\vec{Z}$, die von der Schiene ausgeübt wird, um den Körper auf der vorgegebenen Bahn zu halten speziell für $z = a\cdot x$, $a > 0$!
Unter „Zwangskraft" $\vec{Z}$ versteht man die Kraft, die man beim Entfernen der materiellen Schiene einführen muss, um das Teilchen auf der vorgegeben Bahnkurve zu halten. Die NEWTONsche Bewegungsgleichung hat dann die Form

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad = \quad \vec{F}_g + \vec{Z}\,.$$

Dabei ist aber $\vec{Z}$ zunächst nicht vorgegeben, da sie erst durch den Ablauf der Bewegung bestimmt wird. Das Problem besteht also darin, eine Form der Bewegungsgleichung zu finden, in der $\vec{Z}$ zunächst nicht vorkommt, sondern erst nach Lösung des Bewegungsproblems bestimmt wird. In einfachen Fällen kann $\vec{Z}$ allerdings bestimmt werden, ohne die Bewegungsgleichung explizit zu lösen.
Da sich der Massenpunkt geradlinig bewegt, darf senkrecht zur Bahn keine resultierende Kraft wirken. Die von der Schiene ausgeübte Zwangskraft und die zur Bahn senkrechte Komponente der Gewichtskraft müssen daher entgegengesetzt gleich sein

$$|\vec{Z}| = mg \cos\alpha \,.$$

b)



Zwei Massen sind durch ein masseloses, undehnbares Seil, das über eine ebenfalls als masselos betrachtete feste Rolle geführt wird, miteinander verbunden. Sie bewegen sich im Schwerefeld. Bestimmen Sie die auftretenden Zwangskräfte und lösen Sie die Bewegungsgleichung!

Für die 6 kartesischen Koordinaten gelten 5 Zwangsbedingungen:

$$x_1 = -R \quad , \quad z_1 = 0 \quad , \quad x_2 = R \quad , \quad z_2 = 0 \quad \text{und} \quad g(y_1, y_2) = y_1 + y_2 + \pi R - l = 0 \,.$$

Dabei ist l die Seillänge.
Die ersten 4 Bedingungen ergeben verschwindende Zwangskräfte und triviale Lösungen der Bewegungsgleichungen. Es bleibt

$$m_1 \ddot{y}_1 = m_1 g - Z_1 \qquad\qquad m_2 \ddot{y}_2 = m_2 g - Z_2 \,.$$

Damit die Zwangsbedingung nicht verletzt wird, müssen die Zwangskräfte (Seilkräfte) vom Betrag gleich groß sein. Zweimaliges Differenzieren der letzten Zwangsbedingung ergibt $\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2 = 0$. Subtrahieren der Bewegungsgleichung liefert dann

$$(m_1 + m_2) \cdot \ddot{y}_1 = g \cdot (m_1 - m_2) \ .$$

Damit ergibt sich die Beschleunigung der beiden Körper (gleichförmig beschleunigte Bewegung).

Mit dieser kann nun der Betrag der Zwangskraft aus einer der beiden Bewegungsgleichungen ermittelt werden

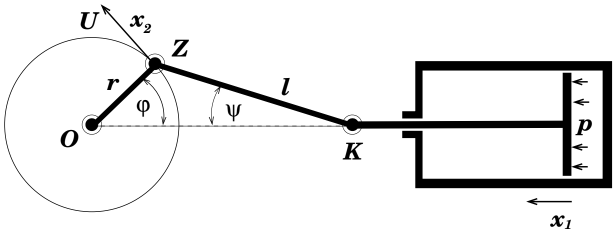
$$Z = 2g \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \,.$$

Die Achse des Rades muss die Summe beider Zwangskräfte aufnehmen:

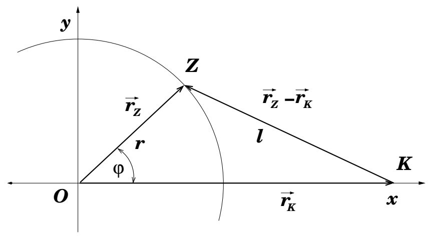
$$Z_1 + Z_2 = 2Z = 4g \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \leq g \cdot (m_1 + m_2) \ .$$

9.4 d'Alembertsches Prinzip: Kurbelmechanismus

Diskutieren Sie den abgebildeten Kurbelmechanismus, indem Sie die virtuelle Arbeit der auftretenden Kräfte berechnen. Bestimmen Sie aus dem d'Alembertschen Prinzip, die Kraft U als Funktion von φ als Gegenkraft zu der Kraft, die das Gleichgewicht zur Schubkraft des Kolbens herstellt, sowie die Kraft, die vom Lager O aufgenommen werden muß1



Wir wählen zur Beschreibung des Systems die beiden Punkte Z und K aus. Den Ursprung des Koordinatensystems legen wir in den Punkt O und die x-Achse in Richtung derKolbenstange.



Schreibt man die Bewegungsgleichungen für die beiden betrachteten Punkte auf findet man

$$
\begin{aligned}
m_Z \ddot{\vec{r}}_Z &= \vec{F}_Z + \vec{Z}_Z \\
m_K \ddot{\vec{r}}_K &= \vec{F}_K + \vec{Z}_K \,.
\end{aligned}
$$

Die Zwangsbedingungen für dieses System sind

$$
\vec{r}_K \vec{e}_y = 0 \quad , \quad \vec{r}_K \vec{e}_z = 0 \quad , \quad \vec{r}_Z \vec{e}_Z = 0
$$

bzw.

$$
\vec{r}_Z^{\,2} = r^2 \quad \text{und} \quad (\vec{r}_Z - \vec{r}_K)^2 = l^2 \,.
$$

Die ersten beiden Zwangsbedingungen beschränken die Bewegung auf die x-y-Ebene. Die dritte erzwingt eine Bewegung des Punktes K auf der x-Achse. Die vierte Zwangsbedingung sagt uns, daß die Bewegung des Punkte Z auf einem Kreis stattfindet, was die Einführung von Polarkoordinaten mit $\rho = r$ nahelegt. Da wir 6 Freiheitsgrade und fünf Zwangsbedingungen haben ist die Bewegung eindimensional Aus der Variation den ersten drei Zwangsbedingungen findet man

$$
\delta y_K = 0 \quad ; \quad \delta z_K = 0 \quad \text{und} \quad \delta z_Z = 0 \,.
$$

Aus der vierten Zwangsbedingung folgt

$$
\delta(\vec{r}_Z^{\,2}) \;=\; \delta(r^2) \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{r}_Z \, \delta\vec{r}_Z = 0 \,,
$$

und aus der fünften schließlich

$$\delta\Big((\vec{r}_Z - \vec{r}_K)^2\Big) \quad = \quad \delta(l^2) \qquad \Longrightarrow \qquad -\vec{r}_K\,\delta\vec{r}_Z - (\vec{r}_Z - \vec{r}_K)\,\delta\vec{r}_K = 0\,,$$

wobe die vierte bereits eingesetzt wurde. Bezeichnet man die x-Komponente con $\vec{r}_K$ mit x und die x- bzw. y- Komponente von $\vec{r}_Z$ mit $r\cos\varphi$ bzw. $r\sin\varphi$ so ergibt sich

$$\delta\vec{r}_K = \delta x\,\vec{e}_x \quad \text{ und } \quad \delta\vec{r}_Z = r\delta\varphi\vec{e}_\varphi\,,$$

womit sich aus der fünften Zwangsbedingung der Zusammenhang zwischen δx und $\delta\varphi$ ergibt

$$x\,r\,\sin\varphi\delta\varphi - (r\cos\varphi - x)\,\delta x = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \delta x = -\frac{x\,r\,\sin\varphi}{x - r\cos\varphi}\,\delta\varphi\,.$$

Den Zusammenhang zwischen x und φ gewinnt man mit Hilfe des Satzes des PHYTAGORAS

$$x = r\cos\varphi + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}\,.$$

Was mit der Abkürzung $k = r/l$ zu

$$\delta x = -\frac{(r\cos\varphi + l\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi})\,r\,\sin\varphi}{l\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,\delta\varphi = -\sin\varphi\left(1 + \frac{k\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\right)r\delta\varphi$$

führt.
Indem man jetzt berücksichtigt, daß die Kräfte im Gleichgewicht gesucht sind (das heißt, die Kräfte, die auftreten, wenn die Bremse am Schwungrad voll angezogen ist, oder wenn die Dampfmaschine so langsam läuft, daß Beschleunigungen vernachlässigt werden können) und damit alle Beschleunigungen Null setzt, bzw. vernachlässigt, ergibt sich

$$\vec{Z}_Z = -\vec{F}_Z \quad \text{ und } \quad \vec{Z}_K = -\vec{F}_K\,.$$

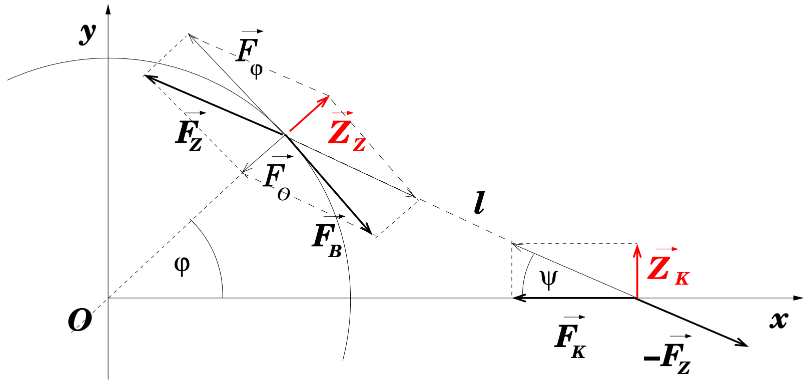
Das D'ALEMBERTsche Prinzip liefert dann

$$\vec{Z}_K\delta\vec{r}_K + \vec{Z}_Z\delta\vec{r}_Z \quad = \quad -\vec{F}_K\delta\vec{r}_K - \vec{F}_Z\delta\vec{r}_Z = -\underbrace{\vec{F}_K\vec{e}_x}_{=\,F_K}\,\delta x - r\,\underbrace{\vec{F}_Z\vec{e}_\varphi}_{=:\,F_\varphi}\,\delta\varphi = 0\,.$$

Für die Kraft ergibt sich damit

$$F_\varphi \quad = \quad -\frac{\delta x}{r\delta\varphi}F_K = \sin\varphi\left(1 + \frac{r\,\cos\varphi}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}}\right)F_K\,.$$

Die Kraft auf das Lager O findet man über den Satz des PHYTAGORAS



$$
\begin{aligned}
F_O &= \sqrt{F_Z^2 - F_\varphi^2} = \sqrt{\frac{F_K^2}{\cos^2\psi} - \left(\frac{\delta x}{r\delta\varphi}\right)^2 F_K^2} \\
&= \sqrt{\frac{1}{1-k^2\sin^2\varphi} - \sin^2\varphi\left(1+\frac{k\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\right)^2}\, pA\,.
\end{aligned}
$$