Prof. Dr. R. Ketzmerick/Dr. R. Schumann
Technische Universität Dresden
Institut für Theoretische Physik Sommersemester 2008

Theoretische Mechanik

10. Übung Lösungen

10.1 Mechanische Freiheitsgrade

Charakterisieren Sie für die folgenden Systeme die Art der Zwangsbedingungen, geben Sie die Zahl der mechanischen Freiheitsgrade an und wählen Sie die zur Beschreibung geeigneten generalisierten Koordinaten.

a) *frei im Raum beweglicher starrer Körper*

$f = 6$; holonom - skleronome Zwangsbedingung; Lage im Raum ist durch 3 nicht-kollineare Punkte gegeben

b) *in einem Punkt fixierter starrer Körper*

$f = 3$; holonom - skleronome Zwangsbedingung

c) *elastisch verformbarer Körper (Kontinuum)*

in ∞ viele differentiell kleine Volumenelemente zerlegbar, die frei gegeneinander beweglich sind, daher $f = \infty$; keine Zwangsbedingung

d) *ebenes mathematisches Pendel, dessen Aufhängepunkt in vorgegebener Weise horizontal bewegt wird*

da der Aufhängepunkt in **vorgegebener Weise** bewegt wird (speziell: er befindet sich in Ruhe !): $f = 1$; holonom - rheonome Zwangsbedingung

e) *ebenes mathematisches Pendel, das an einem auf horizontaler Schiene beweglichen Körper befestigt ist*

da der Aufhängepunkt in **beweglich** ist, besitzt das System einen weiteren Freiheitsgrad: $f = 2$; holonom - skleronome Zwangsbedingung

f) *Massenpunkt, der sich innerhalb eines Rohres bewegt, das in einer horizontalen Ebene mit der Winkelgeschwindigkeit ω gedreht wird*

Der Massenpunkt kann sich nur im (unendlich dünn gedachten Rohr bewegen, seine Lage wird also nur durch die Koordinate längs des Rohrs angegeben, folglich $f = 1$. Da das Rohr in **vorgegebener Weise** bewegt wird, ist die Zwangsbedingung holonom - rheonom.

g) *kleine Kugel, die unter Einfluß ihres Gewichts von einer großen Kugel herunterrollt*

Da sich die kleinere Kugel beim Bewegen auf der größeren Kugel von dieser lösen kann (hängt von den speziellen Anfangsbedingungen ab), ist die Zwangsbedingung nur durch eine Ungleichung formulierbar. Wird die größere Kugel als unbeweglich angenommen, ist die Zwangsbedingung, der die kleinere Kugel unterworfen ist, nicht-holonom - skleronom. Die Lage der kleineren Kugel auf der Oberfläche der größeren ist durch Angabe z.B. von 2 Winkeln eindeutig charakterisiert: $f = 2$. Falls die größere Kugel auf einer Platte ebenfalls **beweglich** sein sollte, erhöht sich die Zahl der Freiheitsgrade des Systems um 2, also dann $f = 4$.

h) *ein Zylinder, der eine raue, geneigte Ebene (Neigungswinkel α) herabrollt.*

Der Zylinder ist einer holonom - skleronomen Zwangsbedingung unterworfen. In der geneigten Ebene besitzt er 2 Freiheitsgrade.

10.2 Lagrange-Gleichungen 1. Art

In der vertikalen x-z- Ebene gleite ein Massenpunkt (Masse m) reibungsfrei unter Einfluss der Schwerkraft ($\vec{g} = -g \cdot \vec{e}_z$) auf einer Schiene, die entsprechend der Funktion $z = f(x)$ gebogen ist.

a) Formulieren Sie die Zwangsbedingung und stellen Sie die Lagrange-Gleichungen I. Art in kartesischen Koordinaten für $x(t)$ und $z(t)$ auf.

Bei der Anwendung der Lagrange- Gleichungen I. Art werden nacheinander die folgenden Schritte ausgeführt:

- **Formulierung der Zwangsbedingung**
  Die Zwangsbedingung ist skleronom und holonom, kann deshalb in der Form

  $$g(x, z) = z - f(x) = 0$$

  formuliert werden.
- **Aufstellen der Lagrange- Gleichungen**
  In die Lagrange-Gleichung I. Art geht der Gradient dieser Zwangsbedingung ein,

  $$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \lambda(\vec{r}, t) \cdot \vec{\nabla} g(x, z) \qquad \vec{F} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z,$$

  wobei $\lambda(\vec{r}, t)$ eine zur Berechnung der Zwangskraft noch zu bestimmende Größe ist.
  In Komponenten lauten diese Gleichungen

  $$m\ddot{z} = -mg + \lambda \qquad m\ddot{x} = -\lambda \cdot f'(x)$$

- **λ eliminieren**
  Dazu differenziert man die Zwangsbedingung zweimal nach der Zeit, um die Beschleunigungskomponenten zu erhalten und diese in dieLagrange - Gleichungen einsetzen zu können:

  $$\dot{z} - f'(x) \cdot \dot{x} = 0 \qquad \ddot{z} - f''(x)\,\dot{x}^{\,2} - f'(x) \cdot \ddot{x} = 0.$$

  Nach Einsetzen in die Lagrange-Gleichungen erhalten wir

  $$\lambda(x, \dot{x}) = m \cdot \frac{g + f''(x)\,\dot{x}^{\,2}}{1 + f'(x)^2}$$

- **Bewegungsgleichungen lösen**
Die Bewegungsgleichungen für den Massenpunkt lauten nach Eliminieren von $\lambda(x, \dot{x})$ dann

$$\ddot{z} = \frac{f''(x)\,\dot{x}^{\,2} - g \cdot f'(x)^2}{1 + f'(x)^2}$$

$$\ddot{x} = -f'(x) \cdot \frac{g + f''(x)\,\dot{x}^{\,2}}{1 + f'(x)^2}$$

In diese Gleichungen geht die Zwangskraft nicht mehr ein, sondern die vorgegebene Bahnkurve $f(x)$!

b) Bestimmen Sie die Zwangskraft $\vec{Z}$ in Abhängigkeit von der x- Koordinate und der Geschwindigkeitskomponente $\dot{x}$.

Die von der Schiene auf den Massenpunkt ausgeübte Zwangskraft kann mit dem oben bestimmten λ angegeben werden:

$$\vec{Z} = \lambda \cdot \left[\vec{e}_z - \vec{e}_x f'(x)\right] = m \cdot \frac{g + f''(x)\,\dot{x}^{\,2}}{1 + f'(x)^2} \left[\vec{e}_z - \vec{e}_x f'(x)\right].$$

Diskussion: 1. Bewegung auf einer horizontalen Geraden ($f'(x) = f''(x) = 0$)(siehe Vorlesung):

$$\vec{Z} = mg\vec{e}_z.$$

2. Explizit ist zu erkennen, dass die Zwangskraft **nicht** allein von der Form der Schiene abhängt, sondern auch durch die Geschwindigkeitskomponente $\dot{x}$ bestimmt ist. Diese wiederum ergibt sich aber erst nach Lösung der Bewegungsgleichung.
Bei Vorliegen von Zwangsbedingungen kann also die Zwangskraft nicht wie die äußeren (eingeprägten) Kräfte vorgegeben, in die NEWTONSCHEsche Bewegungsgleichung eingesetzt und diese dann gelöst werden!

c) Weisen Sie nach, dass die Energie des Teilchens während seiner Bewegung erhalten bleibt.

$$E = \frac{m}{2} \cdot \left[\dot{x}^2 + \dot{z}^2\right] + mgz.$$

$$\frac{dE}{dt} = m \cdot [\dot{x} \cdot \ddot{x} + \dot{z} \cdot \ddot{z}] + mg\dot{z} = -\dot{x}\lambda f' + \dot{z}\,(-mg + \lambda) + mg\dot{z} = 0.$$

Explizit zeigt dies, dass hier die Zwangskraft auch bei der **tatsächlichen** Bewegung keine Arbeit verrichtet. Grund: Die Zwangsbedingung ist holonom; es wird nur ein Massenpunkt betrachtet.

d) Die Schiene habe die Form der nach unten offenen Parabel $z = -\alpha x^2, \alpha > 0$. Untersuchen Sie, ob der Massenpunkt von der Schiene abheben kann, wenn er seine Bewegung auf dem Scheitelpunkt nach einer infinitesimal kleinen Auslenkung aus der Ruhelage heraus beginnt.

Die Bedingung für ein Abheben ist: Die Zwangskraft muss verschwinden, weil der Körper keinen Kontakt mit der Schiene mehr hat. Dazu muss die Geschwindigkeitskomponente $\dot{x}$ aus dem Energieerhaltungssatz ermittelt werden. Da der Körper sich auf dem Scheitel der Schiene (Koordinatenursprung) in Ruhe befinden soll, verschwindet die Energie:

$$E = \frac{m}{2} \cdot \left[\dot{x}^2 + \dot{z}^2\right] + mgf(x) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 \cdot \left[1 + f'(x)^2\right] + mgf(x) = 0.$$

Einsetzen in λ:

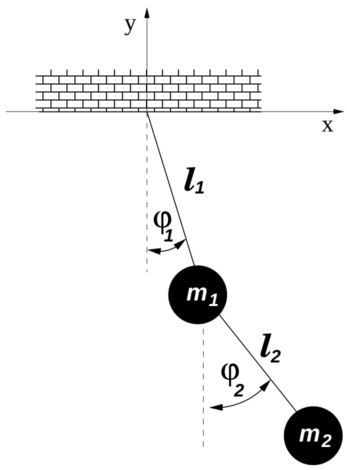
$$\lambda(x) = mg \cdot \frac{1 - 2 \cdot \frac{ff''}{1+f'(x)^2}}{1 + f'(x)^2}$$

Für die vorgegebene Parabel ergibt sich für den Zähler dieses Ausdrucks

$$1 - 2 \cdot \frac{ff''}{1 + f'(x)^2} = 1 - \frac{4\alpha^2 x^2}{1 + 4\alpha^2 x^2} = \frac{1}{1 + 4\alpha^2 x^2} \neq 0.$$

Die Zwangskraft verschwindet also in diesem Falle niemals; der Körper hebt nicht von der Schiene ab. Das ändert sich, wenn ihm zu Beginn der Bewegung eine Anfangsgeschwindigkeit erteilt wird.

10.3 Ebenes Doppelpendel



Als einfaches Modell für eine Glocke werde ein Doppelpendel (Massen m_1, m_2; Längen der masselosen Stangen l_1, l_2) betrachtet. Die Massen mögen sich unter dem Einfluss der Gewichtskraft nur in einer Ebene bewegen.

a) Führen Sie geeignete generalisierte Koordinaten ein und bestimmen Sie die Lagrange-Funktion!. Gewinnen Sie daraus die Lagrange-Gleichungen 2. Art. Von welchem mathematischen Typ sind diese Gleichungen? Welche Form nehmen sie im Grenzfall $m_2 \ll m_1$ an?

Das System besitzt zwei mechanische Freiheitsgrade. Als generalisierte Koordinaten bieten sich die Winkel φ_1 und φ_2 an. Um die Lagrange-Funktion $\mathcal{L}$ als Funktion dieser Koordinaten und der verallgemeinerten Geschwindigkeiten zu bestimmen, sind kinetische Energie und Potential zu bestimmen.

Dazu ist es zweckmäßig, den Ortsvektor $\vec{r}_1$ zum Ort des Massenpunktes 1 und den Vektor $\vec{\xi}$ einzuführen; dann kann der Ortsvektor zum Ort von Massenpunkt 2 als

$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{\xi}$ dargestellt werden. Damit ist die kinetische Energie des Systems

$$\begin{aligned} T &= \frac{m_1}{2}\dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{m_2}{2}\dot{\vec{r}}_2^{\,2} \\ &= \frac{m_1}{2}\dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{m_2}{2} \cdot \left[\dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \dot{\vec{\xi}}^{\,2} + 2\dot{\vec{r}}_1\dot{\vec{\xi}}\right] \\ &= \frac{m_1 + m_2}{2} \cdot \dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{m_2}{2} \cdot \dot{\vec{\xi}}^{\,2} + m_2\dot{\vec{r}}_1\dot{\vec{\xi}} \\ &= \frac{M}{2} l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + m_2 \cdot l_1\dot{\varphi}_1 \cdot \cdot l_2\dot{\varphi}_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1). \end{aligned} \tag{1}$$

Dabei wurde die Gesamtmasse M eingeführt und berücksichtigt, dass der Winkel zwischen den Geschwindigkeitsvektoren $\dot{\vec{r}}_1$ und $\dot{\vec{\xi}}$, die jeweils senkrecht auf den Vektoren $\vec{r}_1$ und $\vec{\xi}$ stehen, durch $\varphi_2 - \varphi_1$ gegeben ist. Für das Potential $V(\varphi_1, \varphi_2)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} V = V_1 + V_2 = -m_1 g z_1 - m_2 g z_2 &= -g\vec{e}_z \cdot \left(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_1 + m_2\vec{\xi}\right) \\ &= -Mgl_1 \cdot \cos\varphi_1 - m_2 g l_2 \cdot \cos\varphi_2. \end{aligned}$$

Die Lagrange-Funktion ist damit

$$\mathcal{L} = \frac{M}{2} l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + Mgl_1 \cdot \cos\varphi_1 + \frac{m_2}{2} l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + m_2 g l_2 \cdot \cos\varphi_2 + m_2 \cdot l_1\dot{\varphi}_1 l_2\dot{\varphi}_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Die ersten beiden Terme stellen die Lagrange-Funktion eines separaten ebenen Pendels der Masse M und der Länge l_1 dar, die folgenden beiden Terme die Lagrange-Funktion eines separaten ebenen Pendels der Masse m_2 mit der Länge l_2, während der letzte Summand die Kopplung der Bewegung der beiden realen Pendelkörper m_1 und m_2 beschreibt.

Das System wird durch zwei Lagrange-Gleichungen II. Art beschrieben, die folgende Gestalt haben:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}_1} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_1} &= 0 \\ \frac{d}{dt}\left[Ml_1^2\dot{\varphi}_1 + m_2 l_1 l_2\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)\right] &= -Mgl_1\sin\varphi_1 + m_2 l_1 l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (2) \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}_2} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_2} &= 0 \\ \frac{d}{dt}\left[m_2 l_2^2\dot{\varphi}_2 + m_2 l_1 l_2\dot{\varphi}_1\cos(\varphi_2 - \varphi_1)\right] &= -m_2 g l_2\sin\varphi_2 - m_2 l_1 l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (3) \end{aligned}$$

Zunächst sieht man, dass die generalisierten Impulse die physikalische Bedeutung von Drehimpulskomponenten haben. Weiter handelt es sich hier um ein System zweier gekoppelter <u>nicht-linearer</u> Differentialgleichungen für die Winkel $\varphi(t)_1$ und $\varphi(t)_1$. Insbesondere diese Nichtlinearität erschwert entscheidend die Lösung dieses Systems. Sie ist im übrigen auch verantwortlich für so genannte chaotische Bewegungen der beiden Pendelkörper.

b) Linearisieren Sie die Lagrange-Gleichungen für kleine Amplituden mit den Näherungsannahmen

$$\varphi_k \ll 1 \qquad \varphi_k \cdot \varphi_l \ll \varphi_m \qquad k, l, m = 1, 2.$$

Um analytisch einen Überblick über die Bewegung des Doppelpendels zu gewinnen, ist es zweckmäßig, zunächst die Bewegung für kleine Winkel $\varphi(t)_1$ und $\varphi(t)_1$ zu untersuchen. Dazu werden die Bewegungsgleichungen linearisiert, d.h. es werden alle Terme, die in den Winkeln oder/und Winkelgeschwindigkeiten quadratisch oder von höherer Ordnung sind, vernachlässigt.
Damit ergibt sich ein lineares, aber immer noch gekoppeltes Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned} Ml_1^2\ddot{\varphi}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_2 + Mgl_1\varphi_1 &= 0 \qquad (4) \\ m_2 l_2^2 \ddot{\varphi}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_1 + m_2 g l_2 \varphi_2 &= 0 \qquad (5) \end{aligned}$$

Es fällt auf, dass aus Gleichung (5) die Masse m_2 herausfällt, während in Gleichung (4) als Parameter das Massenverhältnis m_2/M enthalten ist. Ein zweiter, in beiden Bewegungsgleichungen enthaltener Parameter ist das Verhältnis der Pendellängen l_1/l_2. Man liest ab:

- Für $m_1 \gg m_2$ kann in Gleichung (4) der zweite, die Kopplung der Pendel enthaltende Term vernachlässigt werden. Die Bewegung von m_2 hat dann auf die von m_1 nur geringen Einfluss.
- Für $m_2 \gg m_1$ ist näherungsweise $M \approx m_2$; dann fällt die Masse aus beiden Gleichungen heraus und l_1/l_2 ist der einzige Parameter.

Es wird nun weiter Gleichung (4) nach $\ddot{\varphi}_1$ umgestellt und in Gleichung (5) eingesetzt. Dann erhält das Gleichungssystem die folgenden Gestalt:

$$\begin{aligned} m_1 l_1 \ddot{\varphi}_1 + Mg\varphi_1 &= m_2 g \varphi_2 \\ m_1 l_2 \ddot{\varphi}_2 + Mg\varphi_2 &= Mg\varphi_1 \end{aligned}$$

Mit $\omega_0^2 \equiv g/l$, dem Massenverhältnis $\mu \equiv m_2/m_1$ und der Spezialisierung gleicher Pendellängen vereinfacht sich das Gleichungssystem schließlich zu

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + (1+\mu)\omega_0^2\varphi_1 &= \mu\omega_0^2\varphi_2 \qquad (6) \\ \ddot{\varphi}_2 + (1+\mu)\omega_0^2\varphi_2 &= (1+\mu)\omega_0^2\varphi_1 \qquad (7) \end{aligned}$$

Die linken Seiten dieser Gleichungen erfassen jeweils die Bewegung des einzelnen Pendels, die rechten Seiten beschreiben wieder die Kopplung beider Bewegungen.

Bestimmen Sie aus den linearisierten Gleichungen

$$Ml_1^2 \cdot \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_2 + Mgl_1\varphi_1 = 0$$

$$m_2 l_2^2 \cdot \ddot{\varphi}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_1 + m_2 g l_2 \varphi_2 = 0$$

$(M \equiv m_1 + m_2)$ mit den Ansätzen $\varphi_k = A_k \cdot e^{i\omega t}$ $(k = 1, 2)$ die Eigenfrequenzen des Systems und geben Sie damit die allgemeinen Lösungen für $\varphi_k(t)$ an. Zur Vereinfachung nehme man $l_1 = l_2 \equiv l$ an.
Das System dieser gekoppelten, linearen Differentialgleichungen wird durch die vorgegebenen Exponentialansätze gelöst:

$$\varphi_1 = A_1 \cdot e^{i\omega t} \qquad \varphi_2 = A_2 \cdot e^{i\omega t} .$$

Einsetzen in die Differentialgleichungen ergibt ein lineares, homogenes Gleichungssystem für A_1, A_2. Es ergeben sich nur dann nichttriviale Lösungen, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix verschwindet. Diese Forderung führt auf eine biquadratische Gleichung für die noch unbekannten Frequenzen ω

$$\omega^4 - 2\omega_0^2(1+\mu)\cdot\omega^2 + \omega_0^4(1+\mu) = 0$$

mit den Wurzeln

$$\omega_{1,2}^2 = \omega_0^2(1+\mu) \pm \omega_0^2\sqrt{\mu+\mu^2}.$$

Zu jeder dieser Wurzeln gehört ein bestimmtes Verhältnis der Amplituden A_1 und A_2
Speziell für gleiche Massen $m_1 = m_2$ findet man dann durch Einsetzen in das Gleichungssystem für A_1 und A_2:

$$\begin{array}{lcl} \omega = \omega_1 & \rightarrow & A_2 = -\sqrt{2}\cdot A_1 \\ \omega = \omega_2 & \rightarrow & A_2 = +\sqrt{2}\cdot A_1 \end{array}$$

Man liest daraus ab:

- Schwingen die Pendel mit der größeren Frequenz ω_1, so sind sie in Gegenphase.
- Schwingen die Pendel mit der kleineren Frequenz ω_2, so sind sie in Phase.
- Die Amplitude A_2 des unteren Pendelkörpers m_2 ist stets größer als die des oberen.

Bemerkung: Für den Fall $m_1 \neq m_2$ ergibt sich für das Verhältnis der Eigenfrequenzen

$$\frac{\omega_1^2}{\omega_1^2} = \frac{1+\frac{\mu}{1+\mu}\cdot\sqrt{1+1/\mu}}{1-\frac{\mu}{1+\mu}\cdot\sqrt{1+1/\mu}}.$$

Dieses Verhältnis ist nicht rational. Die Bewegung des Doppelpendels wird daher i.a. nicht periodisch erfolgen.

c) Finden Sie die Lösungen $\varphi_k(t)$ für die Anfangsbedingungen

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0 \qquad \dot\varphi_1(0) = \dot\varphi_0, \qquad \dot\varphi_2(0) = 0$$

und diskutieren Sie deren Zeitverhalten!

Entsprechend diesen Ergebnissen werden nun die allgemeinen Lösungen für $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ als Linearkombinationen der Eigenschwingungen angesetzt:

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= A\cdot e^{i\omega_1 t} + B\cdot e^{i\omega_2 t} \\ \varphi_2(t) &= -A\cdot e^{i\omega_1 t} + B\cdot e^{i\omega_2 t} \end{aligned}$$

Einsetzen der Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} 0 &= A + B \\ 0 &= -A + B \\ 0 &= -A\cdot\omega_1 + B\cdot\omega_2 \\ \dot\varphi_0 &= i\,[A\cdot\omega_1 + B\cdot\omega_2] \end{aligned}$$

Aus diesen 4 Gleichungen werden die **vier** in A und B (beide komplex !) enthaltenen Integrationskonstanten bestimmt.

10.4 Freier Fall auf rotierender Erde

Stellen Sie die LAGRANGE-Funktion für den freien Fall auf der rotierenden Erde auf, und leiten Sie daraus die Bewegungsgleichungen her.

Wir bezeichnen die Koordinaten auf der rotierenden Erde mit $\vec{r}$ und die im Inertialsystem mit $\vec{r}'$. Weiterhin wählen wir den Erdmittelpunkt als Ursprung beider Koordinatensysteme. Dann gilt

$$|\vec{r}| \;=\; |\vec{r}'| \quad \text{und} \quad \dot{\vec{r}}' = \dot{\vec{r}} + \vec{\omega} \times \vec{r}\,.$$

Für das Potential der Gewichtskraft findet man aus $F = -mg\frac{\vec{r}'}{r'}$

$$V(\vec{r}) = mgr' = mgr\,.$$

Die LAGRANGE-Funktion ist dann

$$\mathcal{L} \;=\; T - V = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}'^2 - V = \frac{m}{2}\left(\dot{\vec{r}} + \vec{\omega} \times \vec{r}\right)^2 - mgr = \mathcal{L}(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$$

Für die Bewgungsgleichungen braucht man

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}} &= m\left(\dot{\vec{r}} + \vec{\omega} \times \vec{r}\right) \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}} &= m\left(\ddot{\vec{r}} + \underbrace{\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}}_{=0} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}\right) \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}} &= \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\left(\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 + m\dot{\vec{r}}\left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right) + \frac{m}{2}\left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right)^2 - mgr\right) \\
&= m(\dot{\vec{r}} \times \vec{\omega}) + \underbrace{m\,\omega^2\,\vec{r} - m\,(\vec{\omega}\vec{r})\,\vec{\omega}}_{-m\,\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})} - mg\frac{\vec{r}}{r}\,.
\end{aligned}$$

Die LAGRANGE-Gleichungen ergeben sich somit zu

$$m\,\ddot{\vec{r}} \;=\; \underbrace{-m\,\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}}_{Corioliskraft}\; \underbrace{-m\,\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{Zentrifugalkraft}\; \underbrace{-mg\frac{\vec{r}}{r}}_{Erdanziehung}\,.$$