Prof. Dr. R. Ketzmerick/Dr. R. Schumann
Technische Universität Dresden
Institut für Theoretische Physik

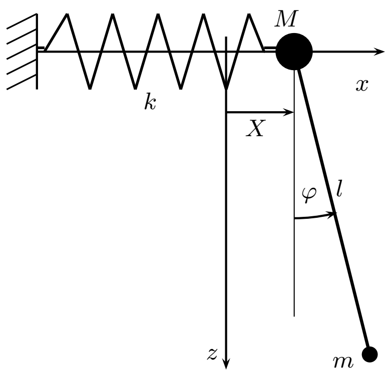
Sommersemester 2008

Theoretische Mechanik

11. Übung

11.1 Pendel mit federgeführtem Aufhängepunkt

Ein ebenes mathematisches Pendel (masselose Stange der Länge l) mit der Masse m ist an einem Teilchen der Masse M angebracht, das sich reibungsfrei entlang der Horizontalen (x-Achse) bewegen kann. Außerdem ist die Masse M an einer (horizontalen) Feder (Federkonstante k) befestigt.
Bestimmen Sie die LAGRANGE-Funktion und die LAGRANGE-Gleichungen.



Das System hat $f = 2$ Freiheitsgrade; als *angepaßte verallgemeinerte Koordinaten* wählen wir die Auslenkung X der Masse M aus ihrer Ruhelage, in die wir auch den Nullpunkt der x-Koordinate legen und den Auslenkwinkel φ des Pendels aus der Vertikalen; die Nebenbedingungen sind dann für alle Werte, die X und φ annehmen können, erfüllt. Das System ist konservativ; die LAGRANGE-Funktion ist also durch $\mathcal{L} = T - V$ gegeben. Wir müssen nun die kinetische und potentielle Energie in diesen Koordinaten darstellen.
Da T und V meist in kartesischen Koordinaten eine einfache Form haben, schreibt man sich am besten die Transformationsformeln zwischen den kartesischen und den angepaßten Koordinaten auf; für m gilt:

$$\begin{aligned} x &= X + l\sin\varphi\,, \qquad & \dot{x} &= \dot{X} + l\dot{\varphi}\cos\varphi \\ z &= l\cos\varphi\,, & \dot{z} &= -l\dot{\varphi}\sin\varphi \end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} T &= \frac{M}{2}\dot{X}^2 + \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{M}{2}\dot{X}^2 + \frac{m}{2}\left(\dot{X}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{X}\dot{\varphi}\cos\varphi\right) \\ V &= -mgz + \frac{k}{2}X^2 = -mgl\cos\varphi + \frac{k}{2}X^2 \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}(X,\varphi,\dot{X},\dot{\varphi}) = T - V = \frac{(M+m)}{2}\dot{X}^2 + \frac{m}{2}l^2\dot{\varphi}^2 + ml\dot{X}\dot{\varphi}\cos\varphi + mgl\cos\varphi - \frac{k}{2}X^2$$

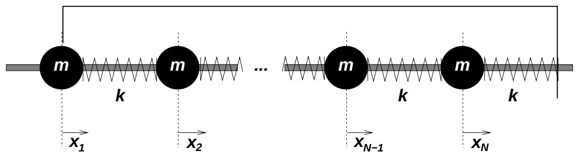
Die LAGRANGE-Gleichungen ergeben sich mit $\mathcal{L}$ zu:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{X}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X} &= 0 \qquad \Longrightarrow \qquad (M+m)\ddot{X} + ml\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi\right) = -kX \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} &= 0 \qquad \Longrightarrow \qquad l\ddot{\varphi} + \ddot{X}\cos\varphi = -g\sin\varphi\,. \end{aligned}$$

Das ist ein System gekoppelter nichtlinearer DGLn.

11.2 Oszillatorkette

N gleiche Massen, die auf einer Stange reibungsfrei gleiten können, seien durch N gleiche Federn untereinander verbunden, wobei die Kraft der N-ten Feder durch eine geeignete masselose Apparatur zur ersten Masse zurückgeführt wird.



a) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen aus der LAGRANGE-Funktion des Systems.

Die Lagrange-Funktion für die Kette ist

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\sum_{1}^{N}\dot{x}_i^2 - \frac{k}{2}\sum_{1}^{N-1}(x_{i+1}-x_i)^2 - \frac{k}{2}(x_1-x_N)^2$$

Für die N Bewegungsgleichungen erhält man mit

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_j} &= m\dot{x}_j\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_j} &= m\ddot{x}_j\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{k}{2}\sum_{1}^{N-1}(x_{i+1}^2 - 2\,x_{i+1}x_i + x_i^2) + \frac{k}{2}(x_1^2 - x_1x_N + x_N^2)\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(k\ \left(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - x_2x_3 + \cdots + x_{N-1}^2 - x_{N-1}x_N + x_N^2 - x_Nx_1\right)\Big)\\ &= \left(k\sum_{1}^{N-1}(x_{i+1}-x_i)(\delta_{i+1,j}-\delta_{i,j}) + k(x_1\delta_{1,j} - x_N\delta_{N,j})\right)\end{aligned}$$

den folgenden Satz von N gekoppelten Bewegungsgleichungen.

$$\begin{array}{cccccl} m\ddot{x}_1 & +2kx_1 & -kx_2 & +\dots & -kx_N & = 0\\ m\ddot{x}_2 & -kx_1 & +2kx_2 & -kx_3 & & = 0\\ & & & & & \vdots\\ m\ddot{x}_N & -kx_1 & +\dots & -kx_{N-1} & 2kx_N & = 0\end{array}$$

b) Lösen Sie diese für $N = 3$ und die Anfangsbedingungen $x_1(0) = -x_0$, $x_2(0) = 0$, $x_3(0) = x_0$ und $\dot{x}_1(0) = 0, \dot{x}_2(0) = 0, \dot{x}_3(0) = 0$.

Mit der Abkürzung $\omega_0^2 = k/m$ ergibt sich das folgende System von drei gekoppelten gewöhnlichen DGL 2. Ordnung

$$\begin{array}{lllllll} \ddot{x}_1 & +2\omega_0^2 x_1 & -\omega_0^2 x_2 & -\omega_0^2 x_3 & = & 0 \\ \ddot{x}_2 & -\omega_0^2 x_1 & +2\omega_0^2 x_2 & -\omega_0^2 x_3 & = & 0 \\ \ddot{x}_3 & -\omega_0^2 x_1 & -\omega_0^2 x_2 & 2\omega_0^2 x_3 & = & 0 \end{array}$$

Mit dem Ansatz

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{i\,\omega t} \qquad \text{mit} \qquad \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = constant$$

ergibt sich das homogene Gleichungssystem für die Konstanten u_1, u_2 und u_3

$$\begin{array}{ccccc} \left(2 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) u_1 & -u_2 & -u_3 & = & 0 \\ -u_1 & \left(2 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) u_2 & -u_3 & = & 0 \\ -u_1 & -u_2 & \left(2 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) u_3 & = & 0 \end{array} .$$

Dieses hat nur dann nichttriviale Lösungen, wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet. Führt man sie Abkürzung $\lambda = 2 - \omega^2/\omega_0^2$ ein, bedeutet das

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda - 2 \stackrel{!}{=} 0$$

Man kann jedes Polynom 3. Grades mittels der cardanischen Formeln exakt lösen. Schneller geht es jedoch, wenn man durch scharfes Hingucken die Lösung $\lambda_1 = -1$ errät, und wenn man noch schärfer hinguckt errät man auch gleich noch die Wurzel $\lambda_2 = 2$. Die dritte Wurzel ergibt sich dann aus dem Absolutglied des Polynoms nach dem VIETAschen Wurzelsatz ebenfalls zu $\lambda_3 = -1$. Damit erhält man für die Eigenfrequenzen und die zugehörigen Lösungen für die Amplituden (Eigenvektoren), die man durch Einsetzen der Eigenfrequenzen und Lösen des dann entstehenden homogenen Gleichungssystems gewinnt

$$\omega_{1,\pm} = 0 \qquad \vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \omega_{2,\pm} = \pm\sqrt{3}\omega_0 \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \omega_{3,\pm} = \pm\sqrt{3}\omega_0 \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Die allgemeine Lösung für drei verschiedene reelle $\lambda \neq 0$ wäre dann eine Linearkombination

$$\mathbf{x} \;=\; A_1 \mathbf{u_1}\, \mathrm{e}^{+i\omega_0 t} + B_1 \mathbf{u_1}\, \mathrm{e}^{-i\omega_0 t} + A_2 \mathbf{u_2}\, \mathrm{e}^{i\sqrt{3}\omega_0 t} + B_2 \mathbf{u_2}\, \mathrm{e}^{-i\sqrt{3}\omega_0 t} + A_3 \mathbf{u_3}\, \mathrm{e}^{i\sqrt{3}\omega_0 t} + B_3 \mathbf{u_3}\, \mathrm{e}^{-i\sqrt{3}\omega_0 t} \; .$$

Der hier auftretende Eigenvektor zur Lösung $\omega_1 = 0$ beschreibt aber eine parallele Verschiebung aller Massen, d.h. die Bewegung des Schwerpunktes. Diese ist nicht oszillatorisch, sondern translativ. Das sieht man auch sofort, indem man alle drei DGL addiert, was zu $\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + \ddot{x}_3 = 0$ führt. Die zugehörigen Integrationskonstanten sind die (verallgemeinerte) Schwerpunktskoordinate bzw. die Schwerpunktsgeschwindigkeit. Die Anfangsbedingungen legen beide Konstanten zu Null fest. Zusammen mit den anderen Anfangsbedingungen ergibt sich damit

$$A_1 = B_1 = A_2 = B_2 = 0 \quad \text{und} \quad A_3 = B_3 = -\frac{x_0}{2}$$

bestimmt werden. Damit ist die Lösung für dieses Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -x_0 \cos\sqrt{3}\omega_0 t \\ x_2(t) &= 0 \\ x_3(t) &= x_0 \cos\sqrt{3}\omega_0 t\,. \end{aligned}$$

c) Bestimmen Sie für den Fall beliebiger N die Eigenfrequenzen des Systems, indem Sie die Auslenkungen als N-dimensionalen Vektor auffassen und das System der gekoppelten DGLs durch einen Exponentialansatz in ein Eigenwertproblem umformen. Die Eigenfrequenzen sind dann gerade die Eigenwerte der Koeffizientenmatrix.

Indem man alle Auslenkungen x_j zu einem Spaltenvektor $\mathbf{x}$ zusammenfasst, alle Gleichungen durch m teilt und mit $\omega_0^2 = k/m$ die Eigenfrequenz eines einzelnen Federschwingers einführt, erhält man

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{x} = \omega_0^2(-2\boldsymbol{E} + \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}^T)\mathbf{x}\,,$$

wobei die folgenden Matrizen eingeführt wurden

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{N-2} \\ x_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{x}$ wird jetzt in der Form

$$\mathbf{x} = \mathbf{u}\,\mathrm{e}^{i\,\omega t}$$

angesetzt, wobei u ein konstanter Vektor ist. Setzt man das in die DGL ein, ergibt sich

$$(-\omega^2 + 2\omega_0^2)\mathbf{x} = \omega_0^2(\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}^T)\mathbf{x}\,,$$

was sich mit der Abkürzung $\lambda = 2 - \omega^2/\omega_0^2$ in das folgende Eigenwertproblem

$$(\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}^T)\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x}$$

umschreiben läßt.

Die Eigenwerte (d.h. das Spektrum) dieses Problems lassen sich jetzt sehr leicht finden, indem man beachtet, daß $\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T = \boldsymbol{E}$ gilt. Damit vertauschen nämlich $\boldsymbol{F}$ und $\boldsymbol{F}^T$, was bedeutet, daß sie sich beide gleichzeitig auf Diagonalform bringen lassen, wobei die Eigenwerte von $\boldsymbol{F}^T$ die reziproken Eigenwerte von $\boldsymbol{F}$ sind. Die Eigenwerte von $\boldsymbol{F}$ findet man nun einfach indem man sich davon überzeugt, daß $\boldsymbol{F}^N = \boldsymbol{E}$ gilt. Die Eigenwerte von $\boldsymbol{F}$ sind damit die N-ten Wurzeln von 1, d.h.

$$\lambda_{F,k} = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{N}k} \quad \text{mit} \quad k = 0,1,2,\ldots,N-1 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda_k = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{N}k} + \mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{N}k} = 2\cos\frac{2\pi}{N}k\,.$$

Das führt schließlich zu

$$\lambda_k = 2 - \frac{\omega_k^2}{\omega_0^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \omega_k = \pm\omega_0\sqrt{2 - 2\cos\frac{2\pi}{N}k} = \pm 2\omega_0 \sin\frac{\pi}{N}k\,.$$

Das hier berechnete Modell ist eine vereinfachte Beschreibung von longitudinalen Gitterschwingungen (Phononen) in einem Kristall.

11.3 Geführtes Kugelpendel

Unter einem Kugelpendel versteht man eine Masse, die der Schwerkraft unterliegt und deren Koordinaten durch eine geeignete Vorrichtung (z.B. eine masselose Stange) auf eine Kugeloberfläche um den Aufhängepunkt beschränkt werden. Es soll hier nun der Fall betrachtet werden, daß sich der Aufhängepunkt eines solchen Kugelpendels längs der Raumkurve $\vec{r}_0(t)$ bewegt. Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf, indem Sie als angepaßte Koordinaten Kugelkoordinaten bezüglich des Aufhängepunktes benutzen! Die Reibung soll vernachlässigt werden. Diskutieren Sie den Spezialfall $\dot{\vec{r}}_0(t) = \mathit{const.}$ für kleine Auslenkungen aus der Ruhelage des Pendels.

Als verallgemeinerte Koordinaten benutzen wir Kugelkoordinaten bezüglich eines Koordinatensystems dessen Ursprung in $\vec{r}_0(t)$ liegt und dessen Achsen ansonsten parallel zu einem raumfesten Koordinatensystem liegen. Damit findet man für den Ortsvektor der Pendelmasse

$$\vec{r}(t) \;=\; \vec{r}_0(t) + l\,\vec{e}_r^{\,\prime} \quad \text{mit} \quad \vec{e}_r^{\,\prime} = \begin{bmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{bmatrix}$$

und dessen Ableitung

$$\dot{\vec{r}}(t) \;=\; \dot{\vec{r}}_0(t) + l\,\dot{\vec{e}}_r^{\,\prime} = \dot{\vec{r}}_0(t) + l\,\dot{\varphi}\sin\vartheta\,\vec{e}_\varphi^{\,\prime} + l\,\dot{\vartheta}\,\vec{e}_\vartheta^{\,\prime}\,.$$

Die sc Lagrange-Funktion ergibt sich damit zu

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - mg\vec{r}\vec{e}_z \\ &= \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}_0^2 + ml\dot{\varphi}\sin\vartheta\,\dot{\vec{r}}_0\vec{e}_\varphi^{\,\prime} + ml\dot{\vartheta}\,\dot{\vec{r}}_0\vec{e}_\vartheta^{\,\prime} + \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta + \frac{ml^2}{2}\dot{\vartheta}^2 - mgz_0 - mgl\cos\vartheta \end{aligned}$$

Die Bewegungsgleichungen sind dann

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{ml^2}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\vartheta}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vartheta}\right) \\ 0 &= \frac{1}{ml^2}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\right)\,, \end{aligned}$$

wobei wir $\mathcal{L}$ durch ml^2 (das Trägheitsmoment des Massepunktes bezüglich des Aufhängepunktes) geteilt haben um im weiteren Schreibarbeitt zu sparen. Nach Ausführen der Differentiationen erhält man

$$0 = \ddot{\vartheta} - \dot{\varphi}^2 \sin\vartheta\cos\vartheta - \frac{g}{l}\sin\vartheta + \frac{\ddot{x}_0}{l}\cos\vartheta\cos\varphi + \frac{\ddot{y}_0}{l}\cos\vartheta\sin\varphi \tag{1}$$

$$0 = \ddot{\varphi}\sin\vartheta + 2\dot{\varphi}\dot{\vartheta}\cos\vartheta - \frac{\ddot{x}_0}{l}\sin\varphi - \frac{\ddot{y}_0}{l}\cos\varphi \tag{2}$$

Diskutieren Sie den Spezialfall $\dot{\vec{r}}_0(t) = const.$ für kleine Auslenkungen aus der Ruhelage des Pendels.

Für $\dot{\vec{r}}_0 = const.$ sind beide Koordinatensystem Inertialsysteme, so daß die physikalischen Vorgänge im bewegten Bezugssystem dieselben sein müssen wie im ruhenden. Das sieht man sofort, da sich die Bewegungsgleichungen wegen $\ddot{x}_0 = \ddot{x}_0 = \ddot{x}_0 = 0$ zu

$$0 = \ddot{\vartheta} - \dot{\varphi}^2\sin\vartheta\cos\vartheta - \frac{g}{l}\sin\vartheta \tag{3}$$

$$0 = \ddot{\varphi}\sin\vartheta + 2\dot{\varphi}\dot{\vartheta}\cos\vartheta \tag{4}$$

vereinfachen. Dieses System beschreibt also ein normales Kugelpendel mit festem Aufhängepunkt Laborsystem. Man sieht hier sofort, das für $(dot\varphi = 0)$ die zweite Gleichung trivial erfüllt ist und die erste die Bewegungsgleichung des ebenen mathematischen Pendels liefert.
Da die Differentialgleichungen gekoppelt und nichtlinear sind, ist eine allgemeine Lösung nur numerisch zu haben. Die stabile Ruhelage ist durch $\vartheta = \pi$ gegeben. Es wird jetzt die Eigenfrequenz des mathematischen Pendels $\omega_0^2 = g/l$ und eine neue Variable über $\theta = \pi - \vartheta$ eingeführt, was

$$0 = -\ddot{\theta} + \dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta - \omega_0^2\sin\theta \tag{5}$$

$$0 = \ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta \tag{6}$$

ergibt. Die zweite Gleichung kann durch Trennung der Variablen gelöst werden

$$\frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}} = -2\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{dt}\sin\theta \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{d}{dt}\ln\dot{\varphi} = -2\frac{d}{dt}\ln\sin\theta \qquad \Longrightarrow \qquad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0\frac{\sin^2\theta_0}{\sin^2\theta}\,, \tag{7}$$

wobei die Anfangsbedinungen $\dot{\varphi}(t=0) = \dot{\varphi}_0$ und $\theta(t=0) = \theta_0$ benutzt wurden. Setzt man das in die erste Gleichung ein, liefert das

$$0 = \ddot{\theta} + \omega_0^2\sin\theta - \dot{\varphi}_0^2\sin^4\theta_0\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}\,. \tag{8}$$

Obwohl sich das Problem sehr vereinfacht hat, bleibt es nichtlinear. Für verschwindende azimutale Angangswinkelgeschwindigkeit erhält man als Lösung wieder das ebene mathematische Pendel, wohingegen bei $\dot{\varphi}_0 \neq 0$ eine Entwicklung nach kleinen Auslenkungen besonderer Überlegungen bedarf.

11.4 Eindeutigkeit der Lagrange-Funktion

Zeigen Sie mit Hilfe des Hamiltonschen-Prinzips der kleinsten Wirkung die Invarianz der lagrangeschen Bewegungsgleichungen unter der folgenden Transformation (Eichtransformation) der Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}(q_1, ..., q_f, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_f, t) \Rightarrow \tilde{\mathcal{L}}(q_1, ..., q_f, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_f, t)$$

mit

$$\tilde{\mathcal{L}}(q_1,...,q_f,\dot{q}_1,...,\dot{q}_f,t) = \mathcal{L}(q_1,...,q_f,\dot{q}_1,...,\dot{q}_f,t) + \frac{d}{dt}\Omega(q_1,...,q_f,t)\,.$$

wobei $\Omega(q_1,...,q_f,t)$ eine beliebige, stetig differenzierbare Funktion sei.

Einsetzen in das Wirkungsintegral ergibt

$$\begin{aligned}
\tilde{S} &= \int_{t_1}^{t_2} dt\mathcal{L}(q_1,...,q_f,\dot{q}_1,...,\dot{q}_f,t) = \int_{t_1}^{t_2} dtL(q_1,...,q_f,\dot{q}_1,...,\dot{q}_f,t) + \int_{t_1}^{t_2} dt\frac{d\Omega}{dt} \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dtL(q_1,...,q_f,\dot{q}_1,...,\dot{q}_f,t) + \Omega(q_1(t_2),...,q_f(t_2),t_2) - \Omega(q_1(t_1),...,q_f(t_1),t_1) \\
&= S + \Omega(q_1(t_2),...,q_f(t_2),t_2) - \Omega(q_1(t_1),...,q_f(t_1),t_1). \qquad (9)
\end{aligned}$$

Die tatsächlichen Bahnen $q_k(t)$ ergeben sich aus der Forderung, dass das Wirkungsintegral $\tilde{S}$ einen Extremwert annimmt bei Variation $q_k(t) + \delta q_k(t)$, wobei die Variation an den Intervallgrenzen verschwinden soll: $\delta q_k(t_1) = \delta q_k(t_2) = 0$.
Damit verschwindet die Variation des Ω enthaltenden Terms und es gilt

$$\delta\tilde{S} = \delta S = 0 \qquad\qquad \text{q.e.d..}$$