Prof. Dr. R. Ketzmerick/Dr. R. Schumann
Technische Universität Dresden
Institut für Theoretische Physik

Sommersemester 2008

Theoretische Mechanik

13. Übung Lösungen

13.1 Trägheitstensor und Satz von Steiner

a) Berechnen Sie den Trägheitstensor eines Quaders der Kantenlängen a, b und c mit $a > b > c$ bezüglich seines Schwerpunktes.

Wir gehen von einer homogenen Dichte ρ aus. Dann berechnet sich das Trägheitsmoment Θ_{xx} bezüglich des Schwerpunktes entsprechend:

$$\begin{aligned}
\Theta_{xx} &= \rho \int\limits_{-a/2}^{a/2} dx \int\limits_{-b/2}^{b/2} dy \int\limits_{-c/2}^{c/2} dz\,(y^2+z^2) \\
&= \rho\left(x\Big|_{-a/2}^{a/2} \frac{y^3}{3}\Big|_{-b/2}^{b/2} z\Big|_{-c/2}^{c/2} + x\Big|_{-a/2}^{a/2} y\Big|_{-b/2}^{b/2} \frac{z^3}{3}\Big|_{-c/2}^{c/2}\right) \\
&= \rho\frac{abc}{12}(b^2+c^2) = \frac{m}{12}(b^2+c^2)\,.
\end{aligned}$$

Das Deviationsmoment Θ_{xy} ergibt sich

$$\begin{aligned}
\Theta_{xy} &= \rho \int\limits_{-a/2}^{a/2} dx \int\limits_{-b/2}^{b/2} dy \int\limits_{-c/2}^{c/2} dz\,(-xy) \\
&= -\rho \underbrace{\int\limits_{-a/2}^{a/2} dx\, x}_{=0} \times \cdots = 0\,.
\end{aligned}$$

Analog (oder schneller durch zyklische Vertauschung!) findet man die anderen Trägheits- bzw. Deviationsmomente. Der Trägheitstensor hat damit folgende Gestalt:

$$\vec{\vec{\Theta}} = \frac{m}{12}\begin{pmatrix} b^2+c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix},$$

d.h er ist bereits bzg. seiner Hauptachsen berechnet, die hier mit den Koordinatenachsen zusammenfallen und hat drei verschiedene Hauptträgheitsmomente.

b) Wie a) aber mit $a = b > c$ (quadratisches Prisma)!

Der Trägheitstensor bekommt damit folgende Gestalt:

$$\vec{\vec{\Theta}} = \frac{m}{12}\begin{pmatrix} a^2+c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_1 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix} .$$

Es gibt nut noch zwei verschiedene Hauptträgheitmomente. Das bedeutet, daß die Trägheitsmomente in Bezug auf alle Achsen, die in der x-y-Ebene liegen und durch den Schwerpunkt gehen gleich ist.

c) Wie a) aber mit $a = b = c$ (Würfel)!

In diesem Fall sind alle Hauptträgheitsmomente gleich. Der Trägheitstensor vereinfacht sich damit folgendermaßen:

$$\vec{\vec{\Theta}} = \frac{m}{12}\begin{pmatrix} 2a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2a^2 \end{pmatrix} = \frac{m}{6}a^2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = J\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

d) Berechnen Sie den Radius R und die Höhe h eines Kreiszylinders, der denselben Trägheitstensor bezüglich seines Schwerpunktes aufweist, wie das unter b) berechnete quadratische Prisma.

Hier geht man natürlich zweckmäßigerweise zu Zylinderkoordinaten über, wobei im folgenden der senkrechte Abstand zur Symmetrieachse mit r bezeichnet wird, um Verwechslungen mit der Dichte zu vermeiden. Es ist klar, daß in der x-y-Ebene Isotropie herrscht. Deswegen müssen nur zwei Hauptträgheitsmomente berechnet werden. Das Trägheitsmoment $J_1 = \Theta_{xx} = \Theta_{yy}$ bezüglich des Schwerpunktes ergibt sich damit:

$$\begin{aligned} J_1 &= \rho\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R dr r \int_{-h/2}^{h/2} dz\,(y^2+z^2) \\ &= \rho\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R dr r \int_{-h/2}^{h/2} dz\,(r^2\sin^2\varphi+z^2) \\ &= \rho z\Big|_{-h/2}^{h/2} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi \sin^2\varphi}_{=\pi} \int_0^R dr r^3 + \rho\pi R^2\frac{z^3}{3}\Big|_{-h/2}^{h/2} \\ &= \rho\pi R^2 h\left(\frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{12}\right) = \frac{m}{4}\left(R^2+\frac{h^2}{3}\right) . \end{aligned}$$

Das Trägheitsmoment $J_3 = \Theta_{zz}$ bezüglich des Schwerpunktes ergibt sich damit:

$$\begin{aligned}
J_3 &= \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R dr r \int_{-h/2}^{h/2} dz \, (x^2 + y^2) \\
&= \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R dr r \int_{-h/2}^{h/2} dz \, r^2 \\
&= \rho z\Big|_{-h/2}^{h/2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R dr r^3 = \rho\pi R^2 h \frac{R^2}{2} = \frac{m}{2} R^2 \,.
\end{aligned}$$

Durch Gleichsetzen mit den in Aufgabenteil b) gewonnenen Trägheitsmomenten findet man

$$R = \frac{a}{\sqrt{3}} \qquad \text{und} \qquad h = c \,.$$

e) Berechnen Sie den Radius R einer Kugel, die denselben Trägheitstensor bezüglich seines Schwerpunktes aufweist, wie der unter c) berechnete Würfel.

Es ist klar, daß keine Raumrichtung ausgezeichnet ist (Isotropie). Deswegen muß hier lediglich ein Trägheitsmoment berechnet werden, was man zweckmäßigerweise in Kugelkoordinaten durchführt Das Trägheitsmoment $J = \Theta_{xx} = \Theta_{yy} = \Theta_{zz} = (\Theta_{xx} + \Theta_{yy} + \Theta_{zz})/3$ bezüglich des Schwerpunktes ergibt sich damit:

$$\begin{aligned}
J &= \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \, \sin\vartheta, \int_0^R dr \, r^2 \underbrace{\left(\frac{y^2 + z^2}{3} + \frac{x^2 + z^2}{3} + \frac{x^2 + y^2}{3} \right)}_{2\,r^2/3} \\
&= \frac{2}{3}\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \, \sin\vartheta \int_0^R dr \, r^4 \\
&= \rho \frac{4\pi}{3} R^3 \, \frac{2}{5} R^2 = \frac{2}{5} m R^2 \,.
\end{aligned}$$

Durch Gleichsetzen mit dem im Aufgabenteil c) berechneten Trägheitsmoment findet man

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}} a \,.$$

f) Berechnen Sie die Trägheitsmomente für die unter a) bis c) berechneten Körper für eine Rotation um die Kanten, für den Kreiszylinder bezüglich einer Rotation um eine parallel zur Symmetrieachse im Zylindermantel liegende Drehachse und für die Kugel für eine den Kugelmantel tangierende Drehachse.

Hier kommt nun der Satz von STEINER zur Anwendung. Bei Rotation des Quaders um eine Kante der Länge a ist die Richtung der Drehachse $\propto \vec{e}_x$, der senkrechte Abstand der Drehachse zum Schwerpunkt ist dann $\sqrt{b^2+c^2}/2$. Damit ergibt sich

$$J_{A,1} = J_{S,1} + m\,r_\perp^2 = J_{S,1} + \frac{1}{4}m(b^2+c^2) = \frac{1}{3}m(b^2+c^2)\,.$$

Die Trägheitsmomente bezüglich der anderen Kanten gewinnt man durch zyklische Vertauschung. Beim quadratischen Prisma mit $a = b$ ergibt sich

$$J_{A,1} = J_{S,1} + m\,r_\perp^2 = \frac{1}{3}m(a^2+c^2) \quad \text{und} \quad J_{A,3} = J_{S,3} + m\,r_\perp^2 = \frac{2}{3}ma^2\,.$$

Für den Würfel erhält man

$$J_A = J_S + mr_\perp^2 = \frac{2}{3}ma^2\,.$$

Für den Kreiszylinder ist der senkrechte Abstand einer Achse, die im Zylindermantel liegt, zur Symmetrieachse gerade R, so daß man

$$J_{A,3} = J_{S,3} + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2\,.$$

erhält.
Für eine Kugel ergibt sich bei Drehung um eine den Kugelmantel tangierende Drehachse

$$J_A = J_S + mR^2 = \frac{7}{5}mR^2\,.$$

g) Berechnen Sie den Trägheitstensor des unter d) betrachteten Kreiszylinders bezüglich eines Punktes des Körpers, der am weitesten vom Schwerpunkt entfernt ist.

Da alle Punkte auf den Kanten des Kreiszylinders gleichweit vom Schwerpunkt entfernt sind, können wir einen beliebigen herausgreifen. Der Vektor $\vec{a}$ vom Schwerpunkt zu diesem Punkt sei

$$\vec{a} = R\vec{e}_x + \frac{h}{2}\vec{e}_z\,.$$

Der Trägheitstensor bezüglich dieses Punktes bekommt damit folgende Gestalt:

$$\vec{\vec{\Theta}}_A = \vec{\vec{\Theta}}_S + m(\vec{a}^{\,2}\mathbf{1} - \vec{a}\circ\vec{a})\,.$$

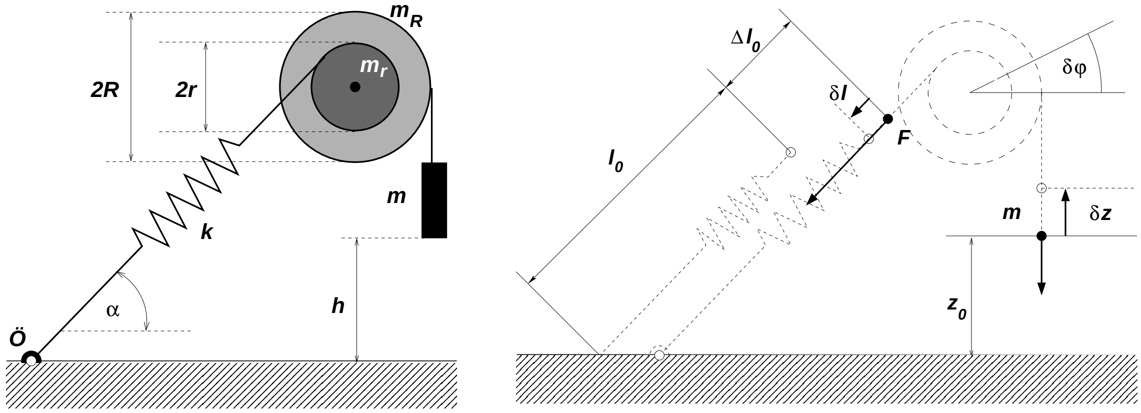
Mit

$$\vec{a}^{\,2} = R^2 + \frac{h^2}{4} \quad \text{bzw.} \quad \vec{a}\circ\vec{a} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 & \frac{Rh}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{Rh}{2} & 0 & \frac{h^2}{4} \end{pmatrix}$$

liefert das

$$\begin{aligned}
\vec{\vec{\Theta}}_A &= m\begin{pmatrix} \frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R^2}{2} \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} \frac{h^2}{4} & 0 & -\frac{Rh}{2} \\ 0 & R^2+\frac{h^2}{4} & 0 \\ -\frac{Rh}{2} & 0 & R^2 \end{pmatrix} \\
&= m\begin{pmatrix} \frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{3} & 0 & -\frac{Rh}{2} \\ 0 & \frac{5}{4}R^2+\frac{h^2}{3} & 0 \\ -\frac{Rh}{2} & 0 & \frac{3R^2}{2} \end{pmatrix}\,.
\end{aligned}$$

13.2 Drehmoment, Rotationsenergie und Drehschwingung



Betrachtet wird die obenstehende Apparatur, bei der auf einer Welle zwei Seilscheiben mit den Massen m_R bzw. m_r und den Radien R bzw. r auf einer Welle angebracht sind. Am Seil der größeren hängt die Last m in der Höhe h über dem Erdboden. Das Seil der kleineren Scheibe ist mittels eine Feder (Federkonstante k) unter dem Winkel α abgespannt. Die Massen der Seile, der Welle und der Feder, sowie Pendelbewegungen der Last können vernachlässigt werden.

a) Bestimmen Sie mit Hilfe des D'ALEMBERTschen Prinzips die Dehnung der Feder!
Das System befindet sich in Ruhe. Die Beschleunigungen verschwinden. Es verbleibt

$$0 = \vec{F}_F \delta\vec{r}_F + \vec{F}_m \delta\vec{r}_m \quad ,$$

wobei F die mit der Feder in Zusammenhang stehenden Größen und m die mit der Masse zusammenhängenden Größen indiziert. Man bekommt mit

$$\vec{F}_F \delta\vec{r}_F = k\Delta l\,\delta l \quad \text{und} \quad \vec{F}_m \delta\vec{r}_m = -mg\,\delta z$$
$$k\Delta l\,\delta l = mg\,\delta z \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta l = \frac{mg}{k}\frac{\delta z}{\delta l}\,.$$

Da eine virtuelle Verschiebung δz der Masse die Welle und damit beide Seilscheiben virtuell um den Winkel $\delta\varphi$ verdreht, findet man wegen $\delta z = R\,\delta\varphi$ und $\delta l = r\,\delta\varphi$

$$\Delta l = \frac{mg}{k}\frac{R}{r}$$

b) Bestimmen Sie die Drehmomente der Feder bzw. der Last bezüglich der Welle.

$$\begin{aligned} \vec{M}_F &= k\Delta l r\,\vec{e}_A \\ \vec{M}_m &= -mgR\,\vec{e}_A\,, \end{aligned}$$

wobei $\vec{e}_A$ die Richtung der Symmetrieachse der Seilscheiben angibt. Man sieht mit Blick auf a) sofort, daß das Gesamtdrehmoment verschwindet.

c) Überlegen Sie sich angepaßte generalisierte Koordinaten und bestimmen Sie die LAGRANGE-Funktion!

Angepaßte Koordinaten könnten zum Beispiel z oder φ sein. Die kinetische Energie ergibt sich aus der Rotationsenergie der beiden Seilscheiben und der translatorischen Energie der Masse zu

$$T = \frac{J_R}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{J_r}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{m}{2}\dot{z}^2 = \frac{J_R + J_r + mR^2}{2}\dot{\varphi}^2 \,.$$

Zur potentiellen Energie trägt sowohl die Feder als auch die Gewichtskraft bei

$$\begin{aligned} U &= mg(z_0 + z) + \frac{k}{2}(\Delta l_0 - \delta l)^2 \\ &= mgz_0 + mgz + \frac{k}{2}(\Delta l_0)^2 - k\Delta l_0 \delta l + \frac{k}{2}(\delta l)^2 \,. \end{aligned}$$

Hier ist jetzt mit Δl_0 unter a) berechnete Auslenkung der Feder und mit z_0 die zugehörige Ruhelage der Masse bezeichnet worden. Drückt man die variablen Größen z und δl, d.h. die Lagekoordinaten gemessen von der Ruhelage (siehe rechte Abbildung) wieder mit dem Winkel φ aus ergibt sich mit den Resultaten aus a)

$$\begin{aligned} U &= \underbrace{mgz_0 + \frac{k}{2}(\Delta l_0)^2}_{=\text{const.}} + \underbrace{(mgR - k\Delta l_0 r)}_{=0,\,\text{wegen a) bzw. b)}} \varphi + \frac{k}{2}r^2\varphi^2 \\ &= \text{const.} + \frac{k}{2}r^2\varphi^2 \,. \end{aligned}$$

Die LAGRANGE-Funktion bekommt die folgende Form

$$\mathcal{L} = \frac{J_R + J_r + mR^2}{2}\dot{\varphi}^2 - \text{const.} - \frac{k}{2}r^2\varphi^2 \,.$$

d) Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf und bestimmen Sie die Eigenfrequenz der Apparatur.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = (J_R + J_r + m\,R^2)\ddot{\varphi} + kr^2\varphi = 0 \,.$$

Indem man jetzt die DGL in die Normalform bringt

$$\ddot{\varphi} + \frac{kr^2}{(J_R + J_r + m\,R^2)}\varphi = 0 \,,$$

mit der DGL für den harmonischen Oszillator vergleicht und für die Trägheitmomente der Seilscheiben $J_r = m_r r^2/2$ und $J_R = m_R R^2/2$ einsetzt, findet man

$$\omega = \sqrt{\frac{kr^2}{J_R + J_r + m\,R^2}} =: \sqrt{\frac{k}{m^\star}} \quad \text{mit} \quad m^\star = m\frac{R^2}{r^2} + \frac{m_R}{2}\frac{R^2}{r^2} + \frac{m_r}{2} \,.$$

e) Zum Zeitpunkt t_0, das System befinde sich zu diesem Zeitpunkt in Ruhe, wird das Seil zwischen Feder und Seilscheibe zerschnitten. Wann und mit welcher Geschwindigkeit schlägt die Last am Boden auf?

Aus dem Energieerhaltungssatz findet man

$$E \;=\; mgh = mgz + \frac{m}{2}\dot{z}^2 + \frac{1}{2}(J_R + J_r)\dot{\varphi}^2\,.$$

Indem man $\dot{\varphi} = \dot{z}/R$ einsetzt ergibt sich

$$mgh - mgz = \frac{1}{2}\left(m + \frac{J_R}{R^2} + \frac{J_r}{R^2}\right)\dot{z}^2\,.$$

Die Auftreffgeschwindigkeit $\dot{z}_1 = \dot{z}(t = t_1)$ ergibt sich damit zu

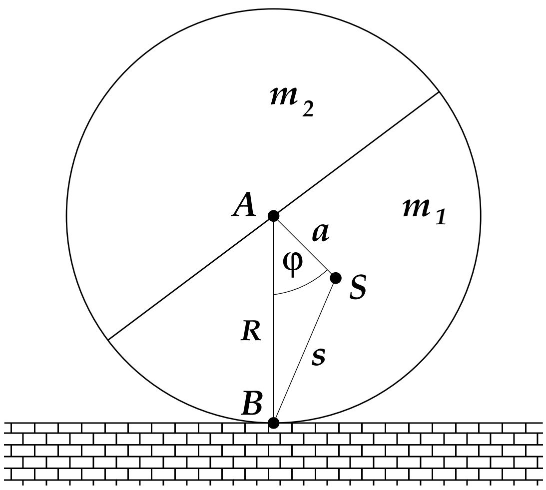
$$\dot{z}_1 \;=-\; \sqrt{\frac{2mgh}{m + \frac{J_R}{R^2} + \frac{J_r}{R^2}}}$$

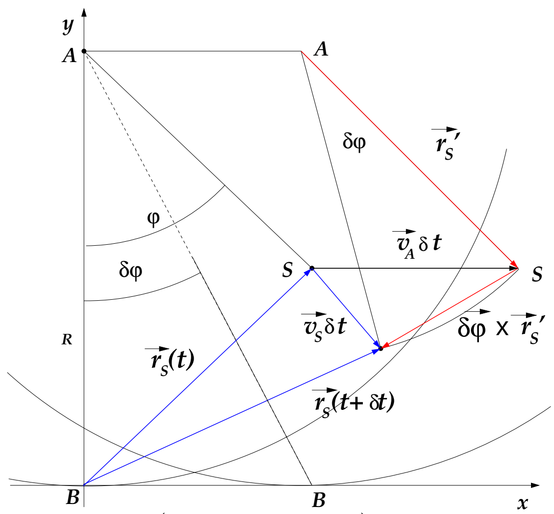
Die Auftreffzeit t_1 erhält man, indem man

$$\dot{z}(t) \;=-\; \sqrt{\frac{2mg(h-z)}{m + \frac{J_R}{R^2} + \frac{J_r}{R^2}}}$$

mittels TdV von 0 bis t_1 integriert.

13.3 Rollpendel





Ein aus zwei Halbzylindern verschiedener Massendichten (Massen m_1, m_2) zusammengesetzter Zylinder (Radius R), dessen Schwerpunkt **S** sich außerhalb der Symmetrieachse **A** befindet, rollt (ohne zu rutschen) auf einer ebenen Unterlage.

a) Bestimmen Sie die kinetische Energie des Körpers, indem Sie einmal die momentane Drehachse und einmal die Drehachse durch den Schwerpunkt als Bezugsachse wählen!

Es gibt drei Möglichkeiten dieses Problem zu behandeln, je nach Wahl der Rotationsachse.

Fall B: Die Bewegung des Zylinders wird als reine Drehbewegung um die momentane Drehachse **B** betrachtet, die durch den Auflagepunkt hindurch geht.

Fall A: Die Bewegung des Zylinders wird als translatorische Bewegung des Punktes **A** und eine Rotation um die Drehachse durch diesen Punkt aufgefasst.

Fall S: Die Bewegung des Zylinders wird als translatorische Bewegung des Schwerpunktes **S** und eine Rotation um die Drehachse durch diesen Punkt aufgefasst.

Da der Körper infolge der Haftreibung auf der Unterlage nicht gleiten soll, sind Translationsbewegung des körperfesten Koordinatenursprungs und die Rotation um diesen über eine **Rollbedingung** verknüpft.
Im raumfesten System mit Koordinatenursprung in **B** dreht sich die Symmetrieachse **A** in der Zeit dt um den Winkel $d\vec{\varphi}$, wobei sie sich um das Stück $d\vec{r}_A = d\vec{\varphi} \times R\vec{e}_y$ weiter bewegt.
Im körperfesten System dreht sich der Punkt B um den Punkt A und bewegt sich dabei um $d\vec{r}\,'_B = d\vec{\varphi}\,' \times (-R\vec{e}_y)$ auf dem Kreisbogen mit Radius R nach links.
"Abrollen" bedeutet, daß der Weg, den der Punkt B in einer festen Zeitspanne auf dem Kreisbogen um A zurücklegt, genausolang ist, wie die Strecke, die der Auflagepunkt B auf der Unterlage zurücklegt.
Die Rollbedingung kann also als

$$d\vec{\varphi} = d\vec{\varphi}\,' \qquad \text{bzw.} \quad d\vec{r}\,'_B = -d\vec{r}_A$$

geschrieben werden. Die Rollbedingung ist verletzt, wenn "Schlupf" auftritt. Dann gilt entweder $d\varphi' > d\varphi$, d.h. der Zylinder dreht sich schneller (Bsp.: Durchdrehen der Räder beim Formel 1 Start), oder $d\varphi' < d\varphi$, d.h der Zylinder dreht sich langsamer (das ist z.B. auf etwa den ersten beiden Dritteln des Weges einer gestoßenen Billardkugel der Fall).
Aus der Rollbedingung folgt also sofort, daß die Winkelgeschwindigkeit der Rotation um die momentane Drehachse **B** bzw. um eine körperfeste Achse (z.B. **A** oder **S**) gleich sind, und deshalb hier in der Bezeichnung nicht unterschieden zu werden brauchen. Wegen dieser Rollbedingung besitzt das System nur **einen** mechanischen Freiheitsgrad. Als verallgemeinerte Koordinate wird der Winkel φ gewählt.

Je nach Wahl der Achslage unterscheiden sich die Trägheitsmomente des Zylinders. Der STEINERsche Satz (für parallele Achsen!) erlaubt uns aber, diese miteinander in Beziehung zu setzen. Es gilt

$$J_A = J_S + Ma^2 \quad , \quad J_B = J_S + Ms^2 \quad \text{bzw.} \quad J_B = J_A + MR^2 - 2MaR\cos\varphi\,,$$

wobei M die Gesamtmasse des Zylinders ist.
Zwischen den Abständen der Achsen besteht der aus dem Cosinussatz folgende Zusammenhang (siehe linke Abbildung):

$$s^2 \;=\; a^2 + R^2 - 2 \cdot a \cdot R\cos\varphi\,.$$

Die kinetische Energie wird jetzt für alle drei Fälle berechnet:

Fall B: Die Rotationsachse geht durch die momentane Drehachse **B**.

$$\begin{aligned} T_B &= \frac{J_B\,\dot{\varphi}^2}{2} \\ &= \frac{(J_S + M\,s^2)\,\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{J_S\,\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{M}{2}\dot{\varphi}^2(a^2 + R^2 - 2aR\,\cos\varphi) \end{aligned}$$

Fall A: Die Rotationsachse geht durch die Symmetrieachse **A**.

Die kinetische Energie bekommt mit $\vec{v} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}'$ (r' bezeichnet die Position eines Massenelementes im körperfesten System, siehe Vorlesung) folgende Gestalt:

$$T_A = \frac{M}{2}\vec{v}_A^2 + M\vec{v}_a\,(\vec{\omega} \times \vec{r}_S') + \frac{J_A}{2}\omega^2\,.$$

Orientiert man die x-Achse nach rechts und die y-Achse nach oben, gilt

$$\vec{\omega} = \omega\,(-\vec{e}_z) \qquad \text{und} \qquad \vec{r}_S' = a\sin\varphi\,\vec{e}_x - a\cos\varphi\,\vec{e}_y$$

Damit kann man den zweiten Term umschreiben

$$\begin{aligned} M\vec{v}_a\,(\vec{\omega} \times \vec{r}_S') &= M(\vec{v}_a \times \vec{\omega})\,\vec{r}_S' = Mv_a\omega(\vec{e}_x \times (-\vec{e}_z))\,\vec{r}_S' \\ &= Mv_a\omega\,\vec{e}_y\vec{r}_S' = -Mv_a\omega\,a\cos\varphi\,. \end{aligned}$$

Indem man $v_a = R\omega = R\dot{\varphi}$ benutzt und das Trägheitsmoment J_A über den Satz von STEINER ausdrückt, erhält man schließlich

$$\begin{aligned} T_A &= \frac{MR^2}{2}\dot{\varphi}^2 - MRa\dot{\varphi}^2\cos\varphi + \frac{J_A}{2}\dot{\varphi}^2 \\ &= \frac{MR^2}{2}\dot{\varphi}^2 - MRa\dot{\varphi}^2\cos\varphi + \frac{J_S + M\,a^2}{2}\dot{\varphi}^2 \\ &= \frac{J_S}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{M}{2}(R^2 - 2Ra\cos\varphi + a^2)\dot{\varphi}^2\,. \end{aligned}$$

Fall S: Die Rotationsachse geht durch den Schwerpunkt **S**.

$$T_S = \frac{M}{2}\vec{v}_S^2 + \frac{J_S}{2}\dot{\varphi}^2$$

Der rechten Abbildung entnimmt man $\vec{v}_S = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_S'$ was mit denselben Schritten wie im Fall A zu

$$\begin{aligned} T_S &= \frac{M}{2}(\vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_S')^2 + \frac{J_S}{2}\dot{\varphi}^2 \\ &= \frac{M}{2}\vec{v}_A^2 + M\vec{v}_A(\vec{\omega} \times \vec{r}_S') + \frac{M}{2}(\vec{\omega} \times \vec{r}_S')^2 + \frac{J_S}{2}\dot{\varphi}^2 \\ &= \frac{MR^2}{2}\dot{\varphi}^2 - MRa\dot{\varphi}^2\cos\varphi + \frac{M}{2}\Big(\underbrace{\vec{\omega}^2\vec{r}_S'^2}_{=\dot{\varphi}^2\,a^2} - \underbrace{(\vec{\omega}\vec{r}_S')^2}_{=0}\Big) + \frac{J_S}{2}\dot{\varphi}^2 \\ &= \frac{J_S}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{M}{2}(R^2 - 2Ra\cos\varphi + a^2)\dot{\varphi}^2\,. \end{aligned}$$

Man sieht also, daß die kinetische Energie in allen drei Fällen dieselbe Abhängigkeit von der verallgemeinerten Koordinate φ und der verallgemeinerten Geschwindigkeit $\dot{\varphi}$ hat, so daß bei der Lösung der Ausdruck, der die Arbeit am meisten vereinfacht, gewählt werden kann.

b) Geben Sie die LAGRANGE - Funktion $\mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi})$ an, wobei als verallgemeinerte Koordinate der Winkel φ zwischen der Vertikalen und dem Lot vom Schwerpunkt auf die Zylinderachse **A** benutzt wird!

Die LAGRANGE - Funktion lautet:

$$\mathcal{L} = \frac{\Theta_S \cdot \dot{\varphi}^2}{2} + \frac{M}{2}\dot{\varphi}^2(a^2 + R^2 - 2aR\cdot\cos\varphi) - Mg(R - a\cos\varphi)$$

c) Wie lautet die Bewegungsgleichung?

Die Bewegungsgleichung ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} \\ &= \Theta_S\,\ddot{\varphi} + M\ddot{\varphi}(a^2+R^2-2aR\cdot\cos\varphi) - MaR\dot{\varphi}^2\sin\varphi + Mga\sin\varphi \end{aligned}$$

d) Zeigen Sie, dass bei der tiefsten Lage des Schwerpunktes ein stabiles Gleichgewicht, bei seiner höchsten Lage ein labiles Gleichgewicht vorliegt! Bestimmen Sie die Frequenz der harmonischen Schwingungen, die der Zylinder für kleine Winkel $\varphi \ll 1$ um das stabile Gleichgewicht ausführt!

Gleichgewichtslagen ($\ddot{\varphi} = 0$) liegen vor bei $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$. Die Art des Gleichgewichts wird dadurch bestimmt, dass man das System etwas auslenkt, und nachschaut ob das System in die Gleichgewichtslage zurückkehrt oder davonläuft. Bewegungsgleichung für die Winkel $\varphi = \epsilon \ll 1$:

$$\Theta_S\,\ddot{\varphi} + M\,\ddot{\varphi}(a-R)^2 = -Mga\varphi$$

Die rechte Seite ist ein **rücktreibendes** Drehmoment, es handelt sich also um eine stabile Gleichgewichtslage bei $\varphi = 0$. Bewegungsgleichung für den Winkel $\varphi = \pi + \epsilon, \epsilon \ll 1$:

$$\begin{aligned} \Theta_S\,\ddot{\varphi} + M\,\ddot{\varphi}(a+R)^2 &= -Mga\sin(\pi+\epsilon) \\ \Theta_S\,\ddot{\epsilon} + M\,\ddot{\epsilon}(a+R)^2 &= Mga\,\epsilon \end{aligned}$$

Die rechte Seite ist ein Drehmoment, das das System aus dem Gleichgewicht heraus treibt, also liegt bei $\varphi = \pi$ ein labiles Gleichgewicht vor.

Die Näherung der Bewegungsgleichung für kleine Winkel $\varphi \ll 1$ ergibt die gesuchte Frequenz:

$$(\Theta_S + M\,(a-R)^2)\ddot{\varphi} + Mga\varphi = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \omega^2 = \frac{Mga}{\Theta_S + M(a-R)^2} = \frac{g}{l^\star}, \, ,$$

mit der “reduzierten” Pendellänge

$$l^\star = a\left(1 - 2\frac{R}{a} + \frac{R^2}{a^2} + \frac{\Theta_s}{Ma^2}\right) .$$

Der Vergleich mit der Frequenz $\omega_0^2 = g/l$ für ein mathematisches Pendel zeigt, dass wie beim physikalischen Pendel die Trägheit des Systems durch das Trägheitsmoment vergrößert wird, so dass scheinbar die Fallbeschleunigung verringert ist.

Der Abstand a des Schwerpunktes von der Zylinderachse **A** ergibt sich mit den Abständen s_i der Schwerpunkte beider Halbzylinder von dieser Achse $s_1 = s_2 = 4R/3\pi$ (siehe Bemerkung) :

$$Ma = m_1\cdot s_1 + m_2\cdot s_2 = \frac{4R}{3\pi}(m_1 - m_2).$$

Damit kann das Trägheitsmoment Θ_S mit dem STEINERschen Satz durch das Trägheitsmoment Θ_A des Zylinders bezüglich seiner Symmetrieachse angegeben werden:

$$\Theta_S = \Theta_A - Ma^2 = M\frac{R^2}{2} - Ma^2$$

und es folgt endgültig für die Frequenz

$$\omega^2 = \frac{g}{R} \cdot \frac{8\Delta/M}{9\pi - 16\Delta/M} \qquad \Delta/M \equiv \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$$

Diskussion:

- Grenzfall symmetrischer Massenverteilung ($m_1 = m_2$): $\omega^2 = 0$; keine Schwingung !
- Grenzfall $a \to R$ (Schwerpunkt liegt sehr tief, rückt gegen Auflagepunkt des Zylinders auf der Ebene): ω wird sehr groß
- Masse m_1 werde außerhalb des Zylinders angebracht, wobei $a \gg R$: Schwingung geht in die des physikalischen Pendels über:

$$\omega^2 = \frac{Mga}{\Theta_S + Ma^2}.$$

Bemerkung: Die Abstände s_1 bzw. s_2 der Schwerpunkte von der Achse erhält man, wenn man den Schwerpunkt einer mit der Masse m belegten halben Kreisscheibe berechnet. Für eine kontinuierliche Massenverteilung (Massedichte μ) ist der Schwerpunkt $\vec{S}$ durch Volumenintegration definiert über

$$\vec{S} = \frac{\iiint dV \; \mu(\vec{r}) \cdot \vec{r}}{\iiint dV \; \mu(\vec{r})},$$

woraus für homogene Massendichte für die y - Koordinate des Schwerpunkts (Integration mit ebenen Polarkoordinaten)

$$S_y = \frac{2}{\pi R^2} \cdot \iint dAy = \frac{2}{\pi R^2} \cdot \int_0^R drr^2 \int_0^\pi d\varphi \sin\varphi = \frac{4R}{3\pi}$$

folgt. S_x ist aus Symmetriegründen gleich null.

13.4 Freie Achsen

In der Vorlesung wurde die Rotation des starren Körpers um freie Achsen besprochen. Weisen Sie analytisch nach, dass die kräftefreie Rotation um die Achse des mittleren Hauptträgheitsmoments stets instabil ist. Gehen Sie dabei von dem Ansatz

$$\omega_1 \approx \omega_0 = \text{konst.} \qquad \omega_2 \ll \omega_0 \qquad \omega_3 \ll \omega_0$$

aus. Setzen Sie diesen in die kräftefreien EULERschen Gleichungen ein, vernachlässigen Sie die in ω_2 und ω_3 quadratischen Terme und gewinnen Sie damit die Differentialgleichungen

$$\ddot{\omega_2} + F(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3) \cdot \omega_2 = 0 \qquad \ddot{\omega_3} + F(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3) \cdot \omega_3 = 0.$$

Diskutieren Sie anschließend das Vorzeichen der Größe F.
In der Vorlesung wurde besprochen:

- EULERsche Gleichungen

$$\begin{aligned}\Theta_1 \cdot \dot{\omega}_1 + (\Theta_3 - \Theta_2) \cdot \omega_2\omega_3 &= M_1 \\ \Theta_2 \cdot \dot{\omega}_2 + (\Theta_1 - \Theta_3) \cdot \omega_1\omega_3 &= M_2 \\ \Theta_3 \cdot \dot{\omega}_3 + (\Theta_2 - \Theta_1) \cdot \omega_1\omega_2 &= M_3\end{aligned}$$

  mit

$$\begin{aligned}\omega_1 &\equiv \dot{\varphi} \cdot \sin\theta \sin\psi + \dot{\theta} \cos\psi \\ \omega_2 &\equiv \dot{\varphi} \cdot \sin\theta \cos\psi - \dot{\theta} \sin\psi \\ \omega_3 &\equiv \dot{\varphi} \cdot \cos\theta + \dot{\psi}\end{aligned}$$

- Eine kräftefreie Translationsbewegung erfolgt mit konstanter Geschwindigkeit. Greifen keine Drehmomente ($M_i = 0$) am starren Körper an, so folgen aus den EULERschen Gleichungen die drei möglichen Lösungen (Rotation um freie Achsen):

$$\omega_1 \equiv \omega_0 = \text{konst.} \qquad \omega_2 = \omega_3 = 0$$

$$\omega_2 \equiv \omega_0 = \text{konst.} \qquad \omega_1 = \omega_3 = 0$$

$$\omega_3 \equiv \omega_0 = \text{konst.} \qquad \omega_1 = \omega_2 = 0$$

Zur Untersuchung der Stabilität dieser Rotation geht man ähnlich vor, wie bei der Untersuchung von Gleichgewichtslagen: Man linearisiert die Bewegungsgleichung (TAYLOR-Entwicklung der Kraft bzw. des Potentials um die Gleichgewichtslage), so dass sie die Form der Bewegungsgleichung für einen harmonischen Oszillator annimmt.
Wir untersuchen eine der oben angegebenen Lösungen: $\omega_1 = \omega_0, \omega_2 = \omega_3 = 0$. Bei einer kleinen Störung dieser Lösung setzen wir

$$\omega_1 \approx \omega_0 \qquad \omega_2 \ll \omega_0 \qquad \omega_3 \ll \omega_0.$$

Die EULERschen Gleichungen lauten dann

$$\begin{aligned}\Theta_1 \cdot \dot{\omega}_1 &\approx 0 \\ \Theta_2 \cdot \dot{\omega}_2 + (\Theta_1 - \Theta_3) \cdot \omega_0\omega_3 &\approx 0 \\ \Theta_3 \cdot \dot{\omega}_3 + (\Theta_2 - \Theta_1) \cdot \omega_0\omega_2 &\approx 0\end{aligned}$$

Differenzieren der zweiten Gleichung und Einsetzen der dritten bzw. Differenzieren der dritten Gleichung und Einsetzen der zweiten ergibt die Differentialgleichungen

$$\ddot{\omega}_2 + F(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3) \cdot \omega_2 = 0 \qquad \ddot{\omega}_3 + F(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3) \cdot \omega_3 = 0$$

mit

$$F(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3) = \omega_0^2 \cdot \frac{(\Theta_1 - \Theta_3)(\Theta_1 - \Theta_2)}{\Theta_2\Theta_3}.$$

Diskussion:

- Falls Θ_1 das größte oder das kleinste Hauptträgheitsmoment ist, gilt stets $F > 0$. Die Gleichungen für ω_2 und ω_3 sind Schwingungsgleichungen mit den Lösungen

  $$\omega_2(t) = \alpha \cdot \cos\left(\sqrt{F}t + \beta\right) \qquad \omega_3(t) = \gamma \cdot \cos\left(\sqrt{F}t + \delta\right).$$

  Das bedeutet: Kleine Störungen $\alpha \ll \omega_0$ bzw. $\gamma \ll \omega_0$ führen zu Oszillationen um den stabilen Bewegungszustand $\omega_1 = \omega_0, \omega_2 = \omega_3 = 0$.

- Falls Θ_1 das mittlere Hauptträgheitsmoment ist, gilt stets $F < 0$. In diesem Falle ergeben sich Lösungen vom Typ

  $$\omega_2(t) = \alpha \cdot e^{-\sqrt{-F}t} + \beta \cdot e^{+\sqrt{-F}t} \qquad \omega_3(t) = \gamma \cdot e^{-\sqrt{-F}t} + \delta \cdot e^{+\sqrt{-F}t}.$$

  Hier führen kleine Störungen $\beta \ll \omega_0, \delta \ll \omega_0$ zu einem exponentiellen Anwachsen der Störung; sie „schaukelt" sich auf. Der ursprüngliche Bewegungszustand ist deshalb instabil.

Bemerkung: Die exponentielle Zeitabhängigkeit gilt natürlich nur, solange die ursprüngliche Bedingung $\omega_2 \ll \omega_0, \omega_3 \ll \omega_0$ erfüllt ist!